文章编号：2096-1618(2017)01-0082-04

完备拟 b 度量空间中循环映射的一些不动点定理

雷　鸣，　吴定平
（成都信息工程大学应用数学学院，四川 成都 610225）

摘要：在非线性分析中，不动点定理的研究是一个重要的领域。为引进新的不动点定理，首先给出 Alghamdi 的拟 b 度量空间定义及偏序拟 b 度量空间的定义。其次定义一对半循环映射的概念，并利用这种半循环映射及泛函分析或者非线性分析中类似于压缩映射的方法定义了两种新的循环映射：LW 型循环映射和 WL 型循环映射。利用这两种映射证明一些不动点定理。最后，证明这些不动点定理在偏序化的拟 b 度量空间中同样成立，并且通过构造一个离散的完备的拟 b 度量空间中的例子说明 LW 型映射是有效的。

关　键　词：泛函分析；非线性分析；不动点；拟 b 度量空间；循环映射
中图分类号：O177.91　　　　**文献标志码**：A
doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2017.01.014

0　引言

1922 年，在普通度量空间中 Banach[1] 证明一个关于压缩映射的不动点定理；此后很长一段时间，数学家找到并证明许多不动点定理[2-4]。Bakhtin[5] 和 Czerwik[6] 建立了 b 度量空间；Amini-Harandi[7] 建立一个有趣的空间：似度量空间；2012 年，Shah 和 Hussain[8] 建立非对称 b 度量空间；2013 年，Alghamdi[9] 建立拟 b 度量空间。2003 年，Kirk 等[11-13] 引入一类循环映射并讨论其不动点的存在性；此后有许多关于循环压缩映射的定理建立起来。2010 年，Karapinar[14] 定义 Kannan 型循环映射，建立相应的不动点定理文中，定义了两种新的循环映射：LW 型循环映射和 WL 型循环映射，在完备拟 b 度量空间中讨论这两种循环映射的不动点的存在性和唯一性。通过一个例子说明这新的映射的有效性。

1　预备知识

定义 1[9]　X 是非空集合，并且 $r:X\times X\to[0,\infty)$ 是一个函数，$s\geq 1$ 是一个常数。(X,r) 称作拟 b 度量空间（b-metric-like space）如果满足下列条件：

（i）$r(z_1,z_2)=0\Rightarrow z_1=z_2$；

（ii）$r(z_1,z_2)=r(z_2,z_1)$；

（iii）$r(z_1,z_2)\leq s(r(z_1,z)+r(z,z_2))$，$\forall z_1,z_2,z\in X$.

定义 2[9]　$\{z_n\}$ 是 (X,r) 中的一个序列，$z\in X$ 称作是 $\{z_n\}$ 的极限当且仅当 $r(z,z)=\lim\limits_{n\to\infty}r(z,z_n)$，称 $\{z_n\}$ 相对于 r 收敛，并且简记为 $z_n\to z$.

定义 3[9]　$\{z_n\}$ 是 (X,r) 中的一个序列，如果 $\lim\limits_{m,n\to\infty}r(z_m,z_n)$ 存在且有限，那么称 $\{z_n\}$ 为一柯西序列.

定义 4[9]　如果拟 b 度量空间 (X,r) 中的每个柯西序列关于 r 收敛，那么 (X,r) 称为完备的.

定义 5[15]　G_1,G_2 是度量空间中的非空子集，如果 $B(G_1)\subset G_2$ 且 $S(G_2)\subset G_1$，那么 $(B,S):G_1\times G_2\to G_2\times G_1$ 称作一对半循环映射；这里 B 称作下半循环映射，S 称作上半循环映射；当 $B=S$ 时，称 B 是循环映射.

以下 (X,r) 总是代表完备的拟 b 度量空间.

定义 6　G_1,G_2 是 X 中的非空子集. 如果 (B,S) 是 $G_1\times G_2$ 上的一对半循环映射且存在非负实数 γ,δ,t 使得对任意的 $u\in G_1,v\in G_2$ 满足下列条件：

$$r(u,v)\geq\gamma r(u,Bu)+\delta r(v,Sv)+tr(Bu,Sv)$$

那么 (B,S) 称作 LW 型循环映射.

定义 7　G_1,G_2 是 X 中的非空子集，如果 (B,S) 是 $G_1\times G_2$ 上的一对半循环映射且 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是一个函数使得对任意的 $u\in G_1,v\in G_2$ 满足下列条件：

$$\varphi(r(u,v))\geq M(u,v)$$

其中 $M(u,v)=\max\{r(u,Bu),r(v,Sv),r(Bu,Sv)\}$，$\varphi$ 满足下列条件：

（1）φ 是非递减的；

（2）$\sum s^n\varphi^n(t)<\infty$，$t\in R^+$，其中 φ^n 指的是 φ 的第 n 次迭代.

称 (B,S) 为 WL 型循环映射.

注：由文献[15]知 $\varphi(v)<t$，$\forall t>0$.

定义 8[15]　如果 $\prec$ 是 (X,r) 上的一个偏序，那么

收稿日期：2016-06-09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11171046）

$(X,r,\prec)$称作偏序拟 b 度量空间.

2　主要结果

定理 1　(B,S)是(X,r)上的 LW 型循环映射,且G_1,G_2是 X 的非空闭子集. 如果 $\gamma+\delta+t>s,t>1$,那么存在唯一的 $z^*\in G_1\cap G_2$ 使 $Bz^*=z^*=Sz^*$,即 B 和 S 有唯一的公共不动点.

证明　定义$\{z_n\}$如下:

$$z_0\in G_1,z_1=Bz_0,z_2=Sz_1,z_3=Bz_2,\cdots \tag{1}$$

因为(B,S)是 LW 型循环映射,所以

$$\begin{aligned}r(z_0,z_1)&\ge\gamma r(z_0,Bz_0)+\delta r(z_1,Sz_1)+tr(Bz_0,Sz_1)\\&=\gamma r(z_0,z_1)+\delta r(z_1,z_2)+tr(z_1,z_2)\\&=\gamma r(z_0,z_1)+(\delta+t)r(z_1,z_2)\end{aligned}$$

从而

$$r(z_1,z_2)\le\frac{1-\gamma}{\delta+t}r(z_0,z_1) \tag{2}$$

类似地,有

$$\begin{aligned}r(z_2,z_1)&\ge\gamma r(z_2,Bz_2)+\delta r(z_1,Sz_1)+tr(Bz_2,Sz_1)\\&=\gamma r(z_2,z_3)+\delta r(z_1,z_2)+tr(z_3,z_2)\\&=\delta r(z_1,z_2)+(\gamma+t)r(z_2,z_3)\end{aligned}$$

即

$$r(z_2,z_3)\le\frac{1-\delta}{\gamma+t}r(z_1,z_2) \tag{3}$$

令

$$L=\max\left\{\frac{1-\gamma}{\delta+t},\frac{1-\delta}{\gamma+t}\right\},\quad M=r(z_0,z_1) \tag{4}$$

结合式(2)、(3)及式(4),有

$$r(z_2,z_3)\le L^2M \tag{5}$$

继续上述过程,可得

$$r(z_n,z_{n+1})\le L^nM,\ \forall n\in N \tag{6}$$

因为 $\gamma+\delta+t>s$,所以 $L<1,sL<1$.

令 $m>n,\forall m,n\in N$,有

$$\begin{aligned}r(z_n,z_m)&\le sr(z_n,z_{n+1})+s^2r(z_{n+1},z_{n+2})+\cdots+s^{m-n}r(z_{m-1},z_m)\\&\le(sL^n+s^2L^{n+1}+\cdots+s^{m-n}L^{m-1})M\\&=[(sL)+(sL)^2+(sL)^3+\cdots+(sL)^{m-n}]L^{n-1}M\\&\le\frac{1-(sL)^{m-n}}{1-sL}sL^nM\\&<\frac{1}{1-sL}L^nM\end{aligned}$$

让 $n\to+\infty$,有

$$\lim_{n\to+\infty}r(z_n,z_m)=0 \tag{8}$$

式(8)蕴含着$\{z_n\}$是一个 Cauchy 序列.

因为(X,r)是完备的,所以有

$$z_n\to z^*\in X \tag{9}$$

于是 $z_{2n}\to z^*,z_{2n+1}\to z^*$.

因为$\{z_{2n}\}\subset G_1,\{z_{2n+1}\}\subset G_2,G_1$ 和 G_2 是闭的,所以有 $z^*\in G_1\cap G_2$.

下证 $Bz^*=z^*=Sz^*$.

因为(B,S)是 LW 型循环映射,所以

$$r(z^*,z^*)\ge\gamma r(z^*,Bz^*)+\delta r(z^*,Sz^*)+tr(Bz^*,Sz^*) \tag{10}$$

因为

$$r(z^*,z^*)=\lim_{m,n\to+\infty}r(z_m,z_n) \tag{11}$$

所以,结合式(10)和式(11)有

$$r(z^*,Bz^*)=r(z^*,Sz^*)=0$$

即

$$Bz^*=z^*=Sz^* \tag{12}$$

下证 B,S 的公共不动点的唯一性.

设 $u,v\in X$ 是 B,S 的公共不动点,那么

$$\begin{aligned}r(u,v)&\ge\gamma r(u,Bu)+\delta r(v,Sv)+tr(Bu,Sv)\\&=\gamma r(u,u)+\delta r(v,v)+tr(u,v)\end{aligned}$$

因为 $t>1$,所以

$$u=v$$

定理证毕.

定理 2　(B,S)是(X,r)中的 WL 型循环映射且 G_1,G_2 是 X 中的非空闭子集,那么存在 $z^*\in G_1\cap G_2$ 使得 $Bz^*=z^*=Sz^*$.

证明　定义$\{z_n\}$如下:

$$z_0\in G_1,z_1=Bz_0,z_2=Sz_1,z_3=Bz_2,\cdots \tag{13}$$

因为(B,S)是 WL 型循环映射,所以

$$\varphi(r(z_0,z_1))\ge M(z_0,z_1) \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}M(z_0,z_1)&=\max\{r(z_0,Bz_0),r(z_1,Sz_1),r(Bz_0,Sz_1)\}\\&=\max\{r(z_0,z_1),r(z_1,z_2)\}\end{aligned}$$

如果 $M(z_0,z_1)=r(z_0,z_1)$,那么

$$r(z_0,z_1)>\varphi(r(z_0,z_1))\ge M(z_0,z_1)=r(z_0,z_1)$$

这个矛盾蕴含着

$$M(z_0,z_1)=r(z_1,z_2) \tag{15}$$

结合式(14)及式(15),有

$$\varphi(r(z_0,z_1))\ge r(z_1,z_2) \tag{16}$$

类似地

$$\varphi(r(z_1,z_2))=\varphi(r(z_2,z_1))\ge M(z_2,z_1) \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}M(z_2,z_1)&=\max\{r(z_2,Bz_2),r(z_1,Sz_1),r(Bz_2,Sz_1)\}\\&=\max\{r(z_2,z_3),r(z_1,z_2)\}\end{aligned}$$

如果 $M(z_2,z_1)=r(z_2,z_1)$,那么

$$r(z_2,z_1)>\varphi(r(z_2,z_1))\ge M(z_2,z_1)=r(z_2,z_1)$$

这个矛盾蕴含着

$$M(z_2,z_1)=r(z_2,z_3) \tag{18}$$

结合式(17)及式(18),有

$$\varphi(r(z_2,z_1)) \geq r(z_2,z_3) \tag{19}$$

结合式(16)及式(19),有

$$r(z_2,z_3) \leq \varphi^2(r(z_0,z_1)) \tag{20}$$

结合式(16)及式(20),有

$$r(z_n,z_{n+1}) \leq \varphi^n(r(z_0,z_1)),\ \forall n \in N \tag{21}$$

令 $m > n$,有

$$\begin{aligned} r(z_n,z_m) &\leq sr(z_n,z_{n+1}) + s^2 r(z_{n+1},z_{n+2}) + \cdots + s^{m-n} r(z_{m-1},z_m) \\ &\leq s\varphi^n(r(z_0,z_1)) + s^2\varphi^{n+1}(r(z_0,z_1)) + \cdots + s^{m-n}\varphi^{m-1}(r(z_0,z_1)) \\ &\leq s^n\varphi^n(r(z_0,z_1)) + s^{n+1}\varphi^{n+1}(r(z_0,z_1)) + \cdots + s^{m-1}\varphi^{m-1}(r(z_0,z_1)) \end{aligned} \tag{22}$$

使 $n \to +\infty$,有

$$\lim_{n\to+\infty} r(z_n,z_m)=0$$

所以 $\{z_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 因为 (X,r) 是完备的,所以存在 $z^* \in X$ 使

$$\lim_{n\to+\infty} r(z_n,z^*)=0 \tag{23}$$

现在得到 $\{z_{2n}\} \subset G_1$ 且 $\{z_{2n+1}\} \subset G_2$, $z_{2n} \to z^*$, $z_{2n+1} \to z^*$. 因为 G_1 和 G_2 是闭的,所以 $z^* \in G_1 \cap G_2$.

下证 $Bz^*=z^*=Sz^*$.

因为 (B,S) 是 WL 型循环映射,所以

$$r(z_{2n},z^*) > \varphi(r(z_{2n},z^*)) \geq M(z_{2n},z^*) \tag{24}$$

其中

$$M(z_{2n},z^*)=\max\{r(z_{2n},Bz_{2n}),r(z^*,Sz^*),r(Bz_{2n},Sz^*)\}$$

令 $n \to +\infty$且结合式(24),有

$$r(z^*,Sz^*)=0$$

即 $Sz^*=z^*$ (25)

类似地

$$r(z^*,z_{2n+1})>\varphi(r(z^*,z_{2n+1}))\geq M(z^*,z_{2n+1}) \tag{26}$$

其中

$$M(z^*,z_{2n+1}) = \max\{r(z^*,Bz^*),r(z_{2n+1},Sz_{2n+1}), r(Bz^*,Sz_{2n+1})\}$$

令 $n \to +\infty$且结合式(26),有

$$r(z^*,Bz^*)=0$$

即 $Bz^*=z^*$ (27)

结合式(25)和式(27),有

$$Bz^*=z^*=Sz^*$$

定理证毕.

推论1 在定理1或定理2中,如果将 (X,r) 替换为 $(X,r,\prec)$,那么所得结论相同.

证明 首先定义偏序 $u \prec Bu \Leftrightarrow u \in G_1$ 或者 $v \prec Sv \Leftrightarrow v \in G_2$. 余下的证明和前面的定理相同.

推论证毕.

3 实例

令 $X=\{0,1,2\}$, $G_1=\{0,1\}$, $G_2=\{1,2\}$. $r:X\times X \to [0,+\infty)$ 是一个如下定义的函数

$r(0,0)=r(1,1)=0, r(2,2)=1, r(0,1)=r(1,0)=4,$
$r(0,2)=r(2,0)=2, r(1,2)=r(2,1)=1.$

易知(X,r)是一个完备的拟 b 度量空间且 $s=1.4$.

定义 $B(0)=2, B(1)=1, S(1)=1, S(2)=1$,这蕴含着 $BG_1 \subset G_2$, $SG_2 \subset G_1$。因此,(B,S) 是 $G_1 \times G_2$ 上的一对半循环映射.

如果取 $0 \in G_1$, $1 \in G_2$,有

$$r(0,1)\geq\gamma r(0,B(0))+\delta r(1,S(1))+tr(B(0),S(1))$$

这蕴含着

$$\gamma r(0,2)+tr(2,1)\leq r(0,1)$$

也就是

$$2\gamma+t\leq 4 \tag{28}$$

如果取 $0 \in G_1$, $2 \in G_2$,有

$$r(0,2)\geq\gamma r(0,B(0))+\delta r(2,S(2))+tr(B(0),S(2))$$

这蕴含着

$$(\delta+t)r(2,1)\leq(1-\gamma)r(0,2)$$

也就是

$$\delta+t+2\gamma\leq 2 \tag{29}$$

如果取 $1 \in G_1$, $1 \in G_2$,有

$$0=r(1,1)\geq\gamma r(1,B(1))+\delta r(1,S(1))+tr(B(1),S(1))=0$$

如果取 $1 \in G_1$, $2 \in G_2$,有

$$r(1,2)\geq\gamma r(1,B(1))+\delta r(2,S(2))+tr(B(1),S(2))$$

也就是

$$\delta\leq 1 \tag{30}$$

由 LW 型循环映射的条件,有

$$t>1$$

$$\gamma+\delta+t>s \tag{31}$$

如果选取

$$\gamma=0.2, \delta=0.1, t=1.5$$

那么它们就满足式(28)和式(31). 因此 B 和 S 有唯一的公共不动点 $0 \in G_1 \cap G_2$.

参考文献:

[1] Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales[J]. Fundam Math,1922,(3):133-181.

[2] Kannan R. Some results on fixed points[J]. II Am

Math Mon,1969,76:405-408.
[3] Ciric LB. A generalization of Banach contraction principle[J]. Proc Am Math Soc,1974,45:267-273.
[4] Ume JS. Fixed point theorems for Kannan-type maps[J]. Fixed Point Theory Appl,2015,38.
[5] Bakhtin IA. The contraction mapping principle in quasimetric spaces[J]. Functional Analysis,1989,30:26-37.
[6] Czerwik S. Contraction mappings in b-metric spaces[J]. Acta Math. inform. Univ. Ostrav,1993,(1):5-11.
[7] Amini Harandi A. Metric-like spaces partial metric spaces and fixed points[J]. Fixed Point Theory Appl,2012,204.
[8] Shah MH, Hussain N. Nonlinear contractions in partially ordered quasi b-metric-spaces[J]. Commun Korean Math. Soc,2012,27(1):117-128.
[9] Alghamdi MA, Hussain N, Salimi P. Fixed point and coupled fixed point theorems on b-metric-like spaces[J]. J. Inequal. Appl,2013,402.
[10] Kirk, WA, Srinivasan, PS, Veeramani, P. Fixed points for mapping satisfying cyclic contractive conditions[J]. Fixed Point Theory,2003,(4):79-89.
[11] A A Eldered, P Veeramani. Convergence and existence for Best proximity Points[J]. J. Math Analysis and Applications,2006,323:1001-1006.
[12] G Petrushel. Cyclic representations and Periodic points [J]. Studia Univ Babes-Bloyai Math,2005,50:107-112.
[13] Pacurar M, Rus I A. Fixed point Theory forφ-contractions[J]. Nonlinear Analysis,2010,72,(3-4):1181-1187.
[14] Karapinar E, Erhan IM. Best Proximity on different type contractions[J]. Appl. Math. Inf. Sci,2010,(5):558-569.
[15] H Aydi, A Felhi, S Sahmim. On common fixed points for (α,ψ)-contractions and generalized cyclic contractions in b-metric-like spaces and consequences[J]. J. Nonlinear Sci. Appl,2016,(9):2492-2510.

Fixed Point Theorems Concerning New Type Cyclic Maps in Complete B-metric-like Spaces

LEI Ming,　WU Ding-ping

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: The research of Fixed point theorems is a important field in nonlinear analysis. First, for the purpose of introducing new fixed point theorems, we give the definitions of b-metric-like spaces which is introduced by Alghamdi and the definitions of partially ordered b-metric-like spaces. Second, we introduce the semicyclic pair map. We define two new cyclic maps with the semicyclic pair map and contraction maps in functional analysis or nonlinear analysis: LW-type and WL-type cyclic maps. We prove some fixed point theorems for such maps. At last, we prove that these fixed point theorems are right too in the partially ordered b-metric-like spaces. And we construct a example in discrete complete b-metric-like spaces to illustrate our main results.

Keywords: functional analysis; nonlinear analysis; fixed point; b-metric-like spaces; cyclic maps