

基于二维决策图分析单调关联系统的“标签”性质

吴兰瑶, 甘成望, 刘 洋
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘要:“标签”理论最初作为一个有用的工具来分析部件寿命是独立同分布的单调关联系统。萨马涅戈和纳瓦罗等人通过得到划分事件的概率和对事件概率求置换的方法,定义系统部件寿命是独立同分布时的“概率标签”和“结构标签”。而对于部件不是独立同分布时,提出二维决策图法来分析“标签”性质。结合二维决策图的可视化以及部件的状态概率进一步地得到部件不是独立同分布情形下的“标签”定义。

关键词:统计学;可靠性理论;概率标签;结构标签;二维决策图

中图分类号: O213.2

文献标志码: A

doi: 10.16836/j.cnki.jcuit.2017.01.016

有关“标签”一词的定义,最初是出现在 Samaniego 1985 年发表的一篇关于可靠性的文章中。“标签”这个理论最开始是作为一种很有用的工具来研究系统的可靠性,这个研究的系统通常是部件独立同分布的系统。而最近几年对于“标签”的研究已经延伸到了部件是可交换寿命的系统。对于部件是不可交换的系统,以及部件是独立不同分布的系统,又或者是部件有相同边缘分布的系统也开始慢慢进行了研究。

1 基本概念

为介绍与“标签”相关的性质,考虑带有 n 个两状态部件 C_1, C_2, \dots, C_n 的两状态系统 S , 即部件和系统均只有工作和失效两个状态。

假设 n 个部件 C_1, C_2, \dots, C_n 被安装时都是新的,系统从 0 时刻开始工作。那么记系统的寿命是 T_S , 则定义系统的可靠度函数为

$$R_S(t) = P\{T_S > t\}$$

记 T_1, T_2, \dots, T_n 表示部件 C_1, C_2, \dots, C_n 的寿命,记 $\bar{F}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 表示 $T \equiv (T_1, T_2, \dots, T_n)$ 的联合生存函数,记 $\bar{G}_k(t)$ 表示 $T_k, k = 1, 2, \dots, n$ 的边缘生存函数,则

$$\bar{F}(t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n\};$$

$$\bar{G}_k(t) = P\{T_k > t\} = \bar{F}(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0),$$

其中 t 表示向量 $(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ 中第 k 个坐标^[1]。

记 $T_{1:n}, T_{2:n}, \dots, T_{n:n}$ 为部件寿命 T_1, T_2, \dots, T_n 的

次序统计量,记 $R_{k:n}(t)$ 为第 k 个次序统计量 $T_{k:n}$ 的边缘可靠度函数。

2 “标签”的定义

学者们对“标签”分别进行了两种定义,一个是“概率标签”,另一个是“结构标签”。在 Samaniego^[1]提出了“概率标签”的术语,Navarro 等^[2]则提出“结构标签”这个术语。

2.1 “概率标签”的定义

首先做一个事件概率的基本假设,即

$$P\{T_S = T_{k:n}, \text{有且只对于一个 } k\} = 1 \quad (1)$$

表达的意思是,当某一个部件失效的时候,引起了系统的失效。

对于这个基本假设,考虑向量 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中的随机变量值 J , 将系统 S 联系起来,定义如下事件是相同的,即:

$$J = k \Leftrightarrow T_S = T_{k:n}$$

进一步地,再考虑一组事件的划分 $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, 其中 E_k 定义为

$$E_k = \{T_S = T_{k:n}\} \equiv \{J = k\}, k = 1, 2, \dots, n.$$

(2)

基于定义的基本假设式(1)和式(2),可得到关于可靠度函数 $R_S(t)$ 的一个计算公式。利用全概率的思想,即:

$$R_S(t) = \sum_{k=1}^n P(T_S = T_{k:n}) \cdot P(T_{k:n} > t | T_S = T_{k:n}), t > 0$$

或者是

$$R_S(t) = \sum_{k=1}^n P(E_k) \cdot R_{k:n}(t | E_k), t > 0 \quad (3)$$

当系统的部件寿命 T_1, T_2, \dots, T_n 是独立同分布, 并且具有连续的分布 G 时, Samaniego^[1] 最初定义的系统 (S, \bar{F}) 的“标签”就为

$$s \equiv (s_1, s_2, \dots, s_n)$$

其中 $s_k = P(E_k), k = 1, 2, \dots, n$ 。通常称 s 为“概率标签”。

更进一步的, 当部件寿命 T_1, T_1, \dots, T_n 是可交换的, 或更特殊的独立同分布时, 对任意的 k , 具有性质:

$$R_{k;n}(t | E_k) = R_{k;n}(t), t > 0$$

那么关于可靠度函数的式(3)就可表示为

$$R_S(t) = \sum_{k=1}^n s_k \cdot R_{k;n}(t), t > 0$$

2.2 “结构标签”的定义

与“概率标签”不同的是, “结构标签”主要是从置换的角度来考虑的。

记 P_n 表示 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的置换的集合, $\pi \in P_n$, 则 P_n 含有 $n!$ 个元素, 可简记 $\pi \equiv (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$ 来表示置换 $\pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ 。

现在考虑 P_n 的子集:

$$A_k := \{\pi \in P_n \mid \{T_{1;n} = T_{\pi(1)}, \dots, T_{n;n} = T_{\pi(n)}\} \Rightarrow E_k\}$$

则 A_1, \dots, A_n 形成了 P_n 的一种划分。则定义:

$$\rho_k := \frac{|A_k|}{n!}$$

其中 $|A_k|$ 表示 A_k 的基数。

那么向量 $\rho \equiv (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ 是系统 S 的一个组合特征, 不会受寿命 T_1, T_2, \dots, T_n 联合分布的影响。确切地说, 在单调关联系统中, $\rho \equiv (\rho_1, \rho_1, \dots, \rho_n)$ 只依赖于系统 S 的结构方程。

Navarro 等^[2] 提出“结构标签”这个术语, 即指定 $\rho \equiv (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ 为系统 S 的“结构标签”。

3 “标签”的性质

根据两个“标签”的定义, 即“结构标签”和“概率标签”, 可得到一个结论是: 在关联系统中, 当部件寿命 T_1, \dots, T_n 是可交换的, 并且满足式(1), 则“概率标签”等同于“结构标签”^[3], 即:

$$s_k = \rho_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

那么式(3)也可表示为:

$$R_S(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \cdot R_{k;n}(t), t > 0$$

4 基于二维决策图分析系统的“标签”性质

二维决策图(binary decision diagram, BDD), 是一类有向非循环图, 由圆圈、方框和单向箭线3部分构成。其中圆圈表示非终节点, 即系统的部件; 方框表示终节点, 即系统的状态; 单向箭线表示非终节点的外向分支, 即部件的状态^[4]。

必须已知系统的结构, 才能得到该系统的决策图。因此文中将以一个具体实例来更加形象地解释。

5 实例分析

若一单调关联系统 $S = \min(\max(T_1, T_2), T_3)$ 的结构如图1所示。

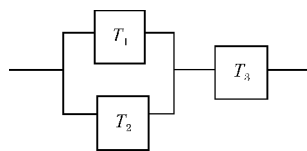


图1 系统 S 的结构图

其中 T_1 表示部件 x_1 的寿命, T_2 表示部件 x_2 的寿命, T_3 表示部件 x_3 的寿命。假设3个部件的寿命是相互独立的, 而部件 x_1 的寿命和部件 x_2 的寿命是服从参数为2的指数分布, 部件 x_3 的寿命服从参数为1的指数分布。这是一个部件是独立不同分布的系统。设它们的生存函数分别用 $\bar{G}(t)$ 和 $\bar{H}(t)$ 表示, 则表达式分别为

$$\bar{G}(t) = \exp\{-2t\}; \quad \bar{H}(t) = \exp\{-t\}$$

5.1 “概率标签”的求得

用 $P(E)$ 来表示上文介绍的事件 E 发生的概率, 那么在计算该系统的“概率标签”时, s_1 即是事件 $E_1 = \{T_{(1)} = T_3\}$ 发生的概率, 即:

$$s_1 = P(T_{(1)} = T_3)$$

事件 E_1 即是部件 x_3 的寿命 T_3 少于部件 x_1 的寿命 T_1 和部件 x_2 的寿命 T_2 , 那么根据这个关系即可得到:

$$P(T_{(1)} = T_3) = P(T_3 < \min(T_1, T_2))$$

根据部件 x_1 和部件 x_2 的寿命服从参数为2的指数分布, 部件 x_3 的寿命服从参数为1的指数分布, 可分别得到它们的密度函数为

$$f_{1,2}(t) = 2\exp\{-2t\}; \quad f_3(t) = \exp\{-t\}$$

那么

$$s_1 = P(T_{(1)} = T_3) = P(T_3 < \min(T_1, T_2)) = P(T_3 < T_1, T_3 < T_2)$$

$$\begin{aligned}
&= 2^2 \int_0^{+\infty} \int_{t_3}^{+\infty} \int_{t_3}^{+\infty} \exp(-2t_1) \exp(-2t_2) dt_1 dt_2 \exp(-t_3) dt_3 \\
&= \int_0^{+\infty} 2^2 \int_{t_3}^{+\infty} \exp(-2t_1) \int_{t_3}^{+\infty} \exp(-2t_2) dt_2 dt_1 \exp(-t_3) dt_3 \\
&= 4 \int_0^{+\infty} \int_{t_3}^{+\infty} \exp(-2t_1) \frac{1}{2} \exp(-2t_3) \exp(-t_3) dt_1 dt_3 \\
&= 4 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \exp(-2t_3) \cdot \frac{1}{2} \exp(-2t_3) \exp(-t_3) dt_3 \\
&= \int_0^{+\infty} \exp(-5t_3) dt_3 \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

而 s_2 是事件 E_2 发生的概率,该事件 E_2 包含了 4 个小事件,即:

$$\begin{aligned}
E_2 = &\{T_{(1)} = T_1, T_{(2)} = T_2\} \cup \{T_{(1)} = T_1, T_{(2)} = T_3\} \\
&\cup \{T_{(1)} = T_2, T_{(2)} = T_1\} \cup \{T_{(1)} = T_2, T_{(2)} = T_3\}
\end{aligned}$$

那么计算公式为

$$\begin{aligned}
s_2 = &P(E_2) = P(T_{(1)} = T_1, T_{(2)} = T_2) + P(T_{(1)} = T_1, T_{(2)} = T_3) \\
&+ P(T_{(1)} = T_2, T_{(2)} = T_1) + P(T_{(1)} = T_2, T_{(2)} = T_3) \\
&= 1 - s_1 = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

所以这个系统的“概率标签”为

$$s = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

5.2 “结构标签”的求得

依据对于“结构标签”的定义,由该系统是 3 个部件构成的,因此 $n = 3$, P_3 表示 $\{1, 2, 3\}$ 的置换的集合,则 P_3 含有 3! 个元素, $\pi \in P_3$, 则

$$\pi_1 = (1 \ 2 \ 3)$$

$$\pi_2 = (1 \ 3 \ 2)$$

$$\pi_3 = (2 \ 1 \ 3)$$

$$\pi_4 = (2 \ 3 \ 1)$$

$$\pi_5 = (3 \ 1 \ 2)$$

$$\pi_6 = (3 \ 2 \ 1)$$

现在考虑 P_3 的子集:

$$A_k := \{\pi \in P_3 \mid \{T_{1;3} = T_{\pi(1)}, T_{2;3} = T_{\pi(2)}, T_{3;3} = T_{\pi(3)}\} \Rightarrow E_k\}$$

那么导致事件 E_1 发生的子集有 2 个,即

$$A_1 = \{\pi_5, \pi_6\}, \text{ 所以}$$

$$\rho_1 = \frac{|A_1|}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

同理,导致事件 E_2 发生的子集有 4 个,即 $A_2 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$, 所以

$$\rho_2 = \frac{|A_2|}{3!} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

而没有子集可以导致事件 E_3 发生,因此 $\rho_3 = 0$, 所以这个系统的“结构标签”为

$$\rho = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

从计算出的“概率标签”和“结构标签”的结果来看,二者并不是相等的。

5.3 利用二维决策图法求解“标签”性质

通过新的方法,即二维决策图法来研究系统的“标签”性质。将此法得到的标签性质定义为“决策图结构标签”和“决策图概率标签”,分别用 jp 和 js 表示。

首先依据这个系统的结构,可得到该系统的二维决策图(binary decision diagram, BDD), 如图 2 所示。

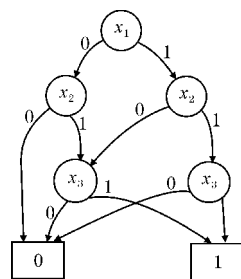


图2 系统 S 的二维决策图

图 2 中的圆圈 x_1 、 x_2 、 x_3 表示系统的 3 个部件;由圆圈出发的单向箭头标有 0 和 1, 表示部件的状态有两个,即工作和失效两种状态;方框是终节点,表示系统的状态,也是工作 1 和失效 0 两种状态。

以最左边的第一条路径为例,表示部件 x_1 处于失效状态,部件 x_2 处于失效状态,不管部件 x_3 处于何种状态,系统处于失效状态。

那么从这个二维决策图中,可以明显观测到系统处于失效状态有 4 条路径,其中只有一个部件失效导致系统失效的路径有 1 条,恰好有两个部件失效导致系统失效的路径有 3 条,不存在当第三个部件失效才导致系统失效的情况。因此,根据文中的式(1),通过二维决策图也可得到系统的另一个“决策图结构标签”为

$$jp = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$$

当部件不是独立同分布,或者部件寿命不可交换时,就不能单纯地只考虑系统的结构来得到系统的标签。若利用二维决策图法来解决这个问题,除只依据结构得到“决策图结构标签”外,还可以通过知道部件处于不同状态下的概率,就能够得到不同于“结构标签”和“概率标签”的另外一个“标签”特性。

假设部件处于不同状态下的概率如表 1 所示。

表 1 部件处于不同状态下的概率表

状态部件 x_i	0(失效)	1(工作)
1	0.2	0.8
2	0.3	0.7
3	0.1	0.3

记 $p_{ij}, (i = 1, 2, 3; j = 0, 1)$ 表示部件 x_i 处于状态 j 的概率。那么根据二维决策图可知,系统处于失效状态有 4 条路径,记 $L_m, (m = 1, 2, 3, 4)$ 表示第 m 条路径导致系统失效的概率。

第一条路径为当部件 x_1 和部件 x_2 失效,部件 x_3 不管失效与否,系统都处于失效状态,这个状态下的概率

$$L_1 = p_{10}p_{20}(p_{30} + p_{31}) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$$

第二条路径为当部件 x_1 和部件 x_3 失效,部件 x_2 处于工作状态,系统处于失效状态,这个状态下的概率

$$L_2 = p_{10}p_{21}p_{30} = 0.2 \times 0.7 \times 0.1 = 0.014$$

第三条路径为当部件 x_2 和部件 x_3 失效,部件 x_1 处于工作状态时,系统处于失效状态,这个状态下的概率

$$L_3 = p_{11}p_{20}p_{30} = 0.8 \times 0.3 \times 0.1 = 0.024$$

第四条路径为当部件 x_3 失效,部件 x_1 和部件 x_2 处于工作状态,系统处于失效状态,这个状态下的概率

$$L_4 = p_{11}p_{21}p_{30} = 0.8 \times 0.7 \times 0.1 = 0.056$$

那么这些总的失效概率之和为

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 0.154$$

下面给出“决策图概率标签”的定义,即

$js_i =$
 i 个部件失效导致系统失效的路径下的失效概率和
失效概率和

$$js_1 = \frac{L_1}{L} = 0.39, js_2 = \frac{L_2 + L_3 + L_4}{L} = 0.61, js_3 = \frac{0}{L} = 0,$$

所以“决策图概率标签”为

$$js = (0.39, 0.61, 0)$$

这个方法是一种只考虑了部件失效数量的方法,而没有考虑部件失效的顺序。用这个方法得到“标签”向量的局限性在于不能直接用于系统可靠度函数的计算。

6 结束语

“标签”这个术语在国内文献中还比较少见,在可靠性的应用中还有很多方面未得到深入研究。已有学者根据“结构标签”的定义对系统进行对称性质的研究,但对称性对系统性能的具体影响是如何体现的,还并未有具体的文献说明。因此,如何深入讨论“标签”性质对系统可靠性的影响是接下来想要研究的内容。

致谢:感谢成都铁路局科技研究开发计划课题(CX1304)对本文的资助

参考文献:

[1] Samaniego F J. On closure of the IFR class under formation of coherent systems [J]. Reliability, IEEE Transactions on, 1985, 34(1): 69-72.

[2] Navarro J, Samaniego F J, Balakrishnan N. The joint signature of coherent systems with shared components [J]. Journal of Applied Probability, 2010, 47(1): 235-253.

[3] Navarro J, Samaniego F J, Balakrishnan N. Signature-based representations for the reliability of systems with heterogeneous components [J]. Journal of Applied Probability, 2011, 48(3): 856-867.

[4] Towhidi F, Lashkari A H, Hosseini R S. Binary decision diagram (BDD) [C]//Future Computer and Communication, 2009. ICFCC 2009. International Conference on. IEEE, 2009: 496-499.

[5] Samaniego F J. System signatures and their applications in engineering reliability [M]. Springer Science & Business Media, 2007.

[6] Kochar S, Mukerjee H, Samaniego F J. The “signature” of a coherent system and its application to comparisons among systems [J]. Naval Research Logistics (NRL), 1999, 46(5): 507-523.

[7] Navarro J, Rubio R. Computations of signatures of coherent systems with five components [J]. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 2009, 39(1): 68-84.

[8] Navarro J, Samaniego F J, Balakrishnan N, et al. On the application and extension of system signatures in engineering reliability [J]. Naval Research Logistics (NRL), 2008, 55(4): 313-327.

[9] Mahmoudi M, Asadi M. The dynamic signature of coherent systems [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2011, 60(4): 817-822.

[10] Spizzichino F. The role of signature and symmetrization for systems with non-exchangeable components [J]. Advances in Mathematical Modeling for Reliability, 2008: 138-148.

[11] Lisnianski A, Frenkel I. Recent Advances in System Reliability: Signatures, Multi-state Systems and Statistical Inference [M]. Springer, 2012.

- [12] Levitin G, Lisnianski A. A new Approach to Solving Problems of Multi-state System Reliability Optimization [J]. Quality and Reliability Engineering International, 2001, 17(2).
- [13] Shrestha A, Xing L. A logarithmic binary decision diagram-based method for multistate system analysis [J]. Reliability, IEEE Transactions on, 2008, 57(4):595-606.
- [14] 张国军, 朱俊, 吴军, 等. 基于 BDD 的考虑共因失效的故障树可靠性分析[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2007, 35(9):1-4.
- [15] 吕关锋, 苏开乐, 林瀚, 等. 基于 BDD 的图表示及其算法[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2006, 45(1):20-24.
- [16] 徐亨成, 张建国. 基于 BDD 技术下的故障树重要度分析[J]. 电子机械工程, 2003, 19(6):1-3.
- [17] 曹晋华, 程侃, 平装, 等. 可靠性数学引论(修订版)[M]. 北京:高等教育出版, 2012.

Based on Binary Decision Diagram to Analysis Signatures Properties of Coherent System

WU Lan-yao, GAN Cheng-wang, LIU Yang

(Southwest Jiaotong University, School of Mathematics, Chengdu 611756, China)

Abstract: The theory of signatures originally emerged as a useful tool in the analysis of coherent systems with components having independent, identically distributed lifetimes. Samaniego and Navarro et al defined probability-signature and structure-signature by means of getting the probability of the partition events and seeking the permutations of the probability of the events which the system components having independent, identically distributed lifetimes. For components are not independent and identically distributed, this chapter proposed the binary decision diagram method to analysis the signature. Combining visualization of binary decision diagram with state probability of components, this chapter got the definition of signature which the system components not having independent, identically distributed lifetimes.

Keywords: statistics; reliability theory; probability-signature; structure-signature; binary decision diagram