文章编号：2096-1618(2017)01-0095-07

方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 的可解性

王 容， 罗文力， 廖群英
（四川师范大学数学与软件科学学院，四川 成都 610066）

摘要：为将 Lehmer 同余式从模素数的平方推广到模任整数的平方，蔡天新等人在 2007 年定义了广义欧拉函数. 本文利用已有的广义欧拉函数的准确计算公式 $\varphi_3(n)$，研究了方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 的正整数解，并利用初等的方法和技巧给出正整数 $n=p^\beta,3p^\beta,p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2},3p_1^{\alpha 1}p_2^{\alpha 2}$ 时，方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 的全部正整数解，其中 $\beta\geq 1$ 且素数 $p\equiv 2(\bmod 3)$，$\alpha_i\geq 1$ 且素数 $p_i\equiv 2(\bmod 3)(i=1,2)$. 给出正整数 $n=3^\alpha\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$，方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 有解的必要条件，其中 $\alpha=0$ 且存在某个 $i=1,\cdots,k$，使得 $p_i\equiv 1(\bmod 3)$ 以及正整数 $n=3^\alpha\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$，其中 $k>2,\alpha\in\{0,1\},\alpha_i\geq 1$ 且素数 $p_i\equiv 2(\bmod 3)(i=1,\cdots,k)$，方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 有解的必要条件.

关 键 词：应用数学；应用数论；广义欧拉函数；方程；正整数解；麦比乌斯函数；同余式
中图分类号：O156.4 **文献标志码**：A
doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2017.01.017

0 引言

熟知，欧拉函数是数论中一个非常重要的函数，它是 18 世纪数学界最杰出的人物之一欧拉提出来的，它的定义如下：正整数 n 的欧拉函数 $\varphi(n)$ 的值等于序列 $0,1,2,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的整数个数[1]. 该函数有很多开放性问题[2]. 比如，Carmichael 猜想，即对于任何正整数 n，总存在一个正整数 $m\neq n$，使得 $\varphi(m)=\varphi(n)$；还有 Schinzel 猜想，即对于任何正整数 k，则 $\varphi(n+k)=\varphi(n)$ 有无限个解. 自 20 世纪七十年代以来，$\varphi(n)$ 成为 RSA 公钥密码体制得以建立的重要数学工具之一[3-6].

21 世纪初，蔡天新等[7-8]为将 Lehmer 同余式从模素数的平方推广到模任意整数的平方，引进了正整数 n 的广义欧拉函数的定义.

定义 1 正整数 n 的广义欧拉函数定义为

$$\varphi_e(n)=\sum_{i=1,(i,n)=1}^{\left[\frac{n}{e}\right]}1,$$

即 $\varphi_e(n)$ 等于序列 $0,1,2,\cdots,\left[\frac{n}{e}\right]$ 中与 n 互素的数的个数，其中 e 为正整数. 容易证明：

$$\varphi_e(n)=\sum_{d\mid n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\left[\frac{d}{e}\right],$$

其中[·]是高斯函数，$\mu(n)$ 是麦比乌斯函数，即

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ (-1)^s, & n\geq 2 \text{ 且 } \alpha_1=\cdots=\alpha_s=1,\\ 0, & n\geq 2 \text{ 且存在 } \alpha_i>1(1\leq i\leq s),\end{cases}$$

其中 $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$，且 $\alpha_i\geq 0$，$p_i(1\leq i\leq s)$ 为不同的素数. 特别的，易知 $\varphi_1(n)=\varphi(n)$ 且 $\varphi_2(n)=\frac{\varphi(n)}{2}$.

进而，蔡天新等[9-11]给出了 $\varphi_e(n)(e=3,4,6)$ 的准确计算公式，其中 $\varphi_3(n)$ 的公式如下：

命题 1 (1) 设 $n=3^\alpha\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$，其中 $k\geq 1,\alpha\geq 0,\alpha_i\geq 1$，$p_i$ 是不同的素数且 $(p_i,3)=1(\forall i=1,\cdots,k)$，则

$$\varphi_3(n)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(n)}{3}+\dfrac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}, & \alpha\in\{0,1\} \text{ 且 } p_i\equiv 2(\bmod 3)(1\leq i\leq k),\\ \dfrac{\varphi(n)}{3}, & \text{其他.}\end{cases}\quad(1)$$

其中 $\Omega(n)=\alpha+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$，当 $\alpha=0$ 时，$\omega(n)=k$；当 $\alpha\geq 1$ 时，$\omega(n)=k+1$. 并规定 $\omega(1)=\Omega(1)=0$.

熟知，欧拉公式的出现为人们探讨欧拉函数性质带来很大的方便. 比如，吕志宏[12]用初等的方法研究了方程 $\varphi(n)=2^{\omega(n)}$ 和 $\varphi(\varphi(n))=2^{\omega(n)}$ 的可解性. 田呈

收稿日期：2016-05-26
基金项目：国家自然科学基金重大资助项目(11401408)；四川省教育厅重点资助项目(14ZA0034)；四川省科技厅应用基础研究计划资助项目(2016JY0134)

亮等[13]给出了方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\Omega(n)}$ 的所有正整数解. 同样,人们也希望利用广义欧拉函数的准确计算公式来讨论一些不定方程的解. 近年来,俞洪玲等[14]利用初等的方法给出了方程 $\varphi_2(n)=2^{\omega(n)}$ 和 $\varphi_2(\varphi_2(n))=2^{\omega(n)}$ 的全部正整数解,金明艳等[15]利用初等的方法研究了方程 $\varphi_2(n)=2^{\Omega(n)}$ 和 $\varphi_2(\varphi_2(n))=2^{\Omega(n)}$ 的可解性. 本文进一步相关问题研究,讨论方程

$$\varphi_3(n)=\frac{n}{d} \tag{2}$$

的全部正整数解 (n,d) 及有解的必要条件,其中 n 为正整数,d 为 n 的正因子,即证明了如下主要结果.

定理 1 设正整数 $n=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$,其中 $k\geq1$,$\alpha_i\geq1$,p_i 是不同的素数且 $(p_i,3)=1(\ \forall i=1,\cdots,k)$.

(1) 设 $\alpha\geq2$,则方程(2)的全部正整数解为 $(n,d)=(3^{\alpha}2^{\beta},9)$,其中 $\beta\geq1$.

(2) 设 $\alpha=0$ 且存在某个 $i=1,\cdots,k$,使得 $p_i\equiv1(\bmod 3)$. 若方程(2)有解,则 $\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}$ 有解.

定理 2 设正整数 $n=3p^{\beta}$,其中 $\beta\geq1$,素数 $p\equiv2(\bmod 3)$. 则方程(2)的全部正整数解为

$$(n,d)=\begin{cases}(15,5),(6,6), & \beta=1,\\ (24,8),(12,12), & \beta\geq2.\end{cases}$$

定理 3 设正整数 $n=p^{\beta}>3$,其中 $\beta\geq1$,素数 $p\equiv(\bmod 3)$. 则方程(2)的全部正整数解为

$$(n,d)=\begin{cases}(5,5), & \beta=1,\\ (4,4),(8,8), & \beta\geq2.\end{cases}$$

定理 4 (1) 设正整数 $n=3^{\alpha}p_1^{\alpha1}p_2^{\alpha2}>3$,其中 $\alpha\in\{0,1\}$,$\alpha_i\geq1$ 且素数 $p_i\equiv2(\bmod 3)(i=1,2)$. 则方程(2)的全部正整数解为

$$(n,d)=\begin{cases}(10,5),(20,10),(80,8), & \alpha=0,\\ (66,11),(30,15),(60,10),(120,12), & \alpha=1\end{cases}$$

(2) 设正整数 $n=3^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$,其中 $k>2$,$\alpha\in\{0,1\}$,$\alpha_i\geq1$ 且素数 $p_i\equiv2(\bmod 3)(\ \forall \mathrm{i}=1,\cdots,k)$. 若方程(2)可解,则以下两条之一成立.

(I) 当 $k>2$ 且 $\alpha=0$ 时,$2^{\beta_1-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}$;

(II) 当 $k>2$ 且 $\alpha=1$ 时,$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}$;或

$$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i},$$

其中对于任意 $i=1,\cdots,k$,$0\leq\beta_i\leq\alpha_i$,且存在 $j=2,\cdots,k$,使得 $(\alpha_j,\beta_j)=(1,0)$.

1 主要结果的证明

1.1 定理 1 的证明

(1) 当 $\alpha\geq2$ 时,由题设条件及(1)式可得

$$\frac{2\cdot3^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}=\frac{n}{d}=\frac{3^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d},$$

即

$$2d\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})=9,$$

从而 $k=1$,$p_1=2$,$d=9$,故 $(n,d)=(3^{\alpha}2^{\beta},9)$,其中 $\beta\geq1$.

进而,当 $\alpha=1$ 且存在 $i=1,\cdots,k$,使得 $p_i\equiv1(\bmod 3)$ 时,即 $n=3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$. 由题设条件及式(1)可得

$$\frac{2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}=\frac{n}{d}=\frac{3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d},$$

即

$$2d\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})=9,$$

从而 $k=1$,$p_1=2$,$d=9$,此与 $p_1\equiv1(\bmod 3)$ 矛盾 . 故此时方程(2)无解.

(2) 设 $\alpha=0$ 且存在 $i=1,\cdots,k$,使得 $p_i\equiv1(\bmod 3)$,即 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$,此时由题设条件及(1)式可得

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}=\frac{n}{d}=\frac{\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d},$$

即

$$d\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}. \tag{3}$$

注意到 d 是 n 的正因子,不妨设 $d=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\beta_i}$,其中 $0\leq\beta_i\leq\alpha_i(\ \forall i=1,\cdots,k)$. 故(3)式等价为

$$\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}. \tag{3}$$

若 $k=1$ 且 $p_1\equiv1(\bmod 3)$,则由(4)式可知

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=3p_1^{\alpha_1-\beta_1}.$$

注意到素数 $p_1\equiv1(\bmod 3)$ 且 $(p_1,p_1-1)=1$,故必有 $\beta_1=1$,从而 $p_1=4$,此与 p_1 是素数矛盾,因此 $k\geq2$. 此时若存在两个 $p_i\equiv1(\bmod 3)$,则方程(4)的左边有两个 3,但右边只有一个 3. 故必存在一个 $p_i\equiv1(\bmod 3)$,此时方程(2)有解的必要条件是 $\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}$ 有解.

这就证明了定理 1.

1.2 定理 2 的证明

(1) 当 $\beta=1$ 时,即 $n=3p$,则 $\Omega(n)=2$,此时由(1)

式可得

$$\frac{2(p-1)}{3}+\frac{(-1)^2\cdot 2^{2-1-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{3p}{d},$$

即

$$(2d-9)\cdot p=d>0, \quad (5)$$

从而 $d\geq 5$ 且 $p\mid d$. 又因为 $d\mid n=3p$,所以 $d=p$ 或 $3p$. 若 $d=p$,则由(5)式可知 $2d-9=1$,从而 $d=p=5$ 且 $n=15$. 若 $d=3p$,则由(5)式可知 $2d-9=3$,从而 $d=6$,故 $p=2$, $n=6$.

(2) 当 $\beta\geq 2$ 时,由题设条件及(1)式可知

$$\frac{2p^{\beta-1}(p-1)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2^{2-1-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{3p^\beta}{d},$$

即

$$2dp^{\beta-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot d=9p^\beta, \quad (6)$$

于是必有 $p^{\beta-1}\mid d$. 又因为 $d\mid n=3^\beta$,故 $d=p^{\beta-1}, 3p^{\beta-1}, p^\beta$ 或 $3p^\beta$,若 $d=p^{\beta-1}$或 $3p^{\beta-1}$,则由(4)式可得

$$2p^{\beta-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9p \text{ 或 } 3p. \quad (7)$$

注意到 $\beta\geq 2$,对(7)式两边取模 p 可得 $p\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p 为素数矛盾,故必有 $d=p^\beta$ 和 $3p^\beta$. 若 $d=p^\beta$,则由(6)式可得 $p^{\beta-1}(p-1)=4$ 或 5,由于素数 $p\equiv 2 \pmod 3$,故 $p^{\beta-1}(p-1)$ 为偶数,则有 $p^{\beta-1}(p-1)=4$. 从而 $p=2$ 且 $\beta=3$,即 $d=8$ 且 $n=24$. 若 $d=3p^\beta$,则由(6)式可得 $p^{\beta-1}(p-1)=1$ 或 2,同理可得 $p^{\beta-1}(p-1)=2$. 从而 $p=2$ 且 $\beta=2$,即 $d=12$ 且 $n=12$.

这就证明了定理 2.

1.3　定理 3 的证明

(1) 当 $\beta=1$ 时,即 $n=p$,则 $\Omega(n)=1$. 此时由题设条件及(1)式可得

$$\frac{p-1}{3}+\frac{(-1)\cdot 2^{1-0-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{p}{d},$$

即

$$(d-3)p=2d>0, \quad (8)$$

从而 $d>3$ 且 $p\mid 2d$. 又因为 $d\mid n=p$,故 $d=p$,从而由(8)式可得 $d=p=5$ 且 $n=5$.

(2) 当 $\beta\geq 2$ 时,由题设条件及(1)式可得

$$\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2^{1-0-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{p^\beta}{d},$$

即

$$d\cdot p^{\beta-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)}\cdot d=3p^\beta, \quad (9)$$

于是必有 $p^{\beta-1}\mid d$. 又因为 $d\mid n=p^\beta$,故 $d=p^{\beta-1}$或 p^β. 若 $d=p^{\beta-1}$,则由方程(9)可得

$$2p^{\beta-1}(p-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p. \quad (10)$$

注意到 $\beta\geq 2$,对(10)式两边取模 p 可得 $p\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p 为素数矛盾,故 $d=p^\beta$. 从而由(9)式可得 $p^{\beta-1}(p-1)=2$ 或 4. 若 $p^{\beta-1}(p-1)=2$,即 $p=2$ 且 $\beta=2$,故 $n=4$ 且 $d=4$. 若 $p^{\beta-1}(p-1)=4$,即 $p=2$ 且 $\beta=3$,从而 $n=8$ 且 $d=8$.

这就证明了定理 3.

1.4　定理 4 的证明

先证明(1),分 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 两种情形。

情形一: 当 $\alpha=0$ 时,即 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$. 由题设条件及(1)式可得

$$\frac{p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2^{2-0-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}}{d},$$

即

$$dp_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+2d\cdot(-1)^{\Omega(n)}=3p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}. \quad (11)$$

注意到(11)式的左边是偶数,从而(11)式的右边必有一个素因子是 2,不妨设 $p_1=2$,即 $n=2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,其中奇素数 $p_2\equiv 2 \pmod 3$. 于是由(11)式可知

$$d\cdot 2^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+2d\cdot(-1)^{\Omega(n)}=3\cdot 2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}. \quad (12)$$

1) 当 $\alpha_1=1$ 时,即 $n=2p_2^{\alpha_2}$. 此时由(12)式可得

$$d\cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+2d\cdot(-1)^{\Omega(n)}=6p_2^{\alpha_2}, \quad (13)$$

于是必有 $p_2^{\alpha_2-1}\mid 2d$. 又因为 $d\mid n=2p_2^{\alpha_2}$ 且 $d\mid 6p_2^{\alpha_2}$,故

$$d=p_2^{\alpha_2-1}, 2p_2^{\alpha_2-1}, p_2^{\alpha_2} \text{ 或 } 2p_2^{\alpha_2}, \quad (14)$$

i) 若 $\alpha_2=1$,即 $n=2p_2$,则 $\Omega(n)=2$. 此时由(13)式可得

$$(6-d)p_2=d>0, \quad (15)$$

故 $0<d<6$ 且 $p_2\mid d$,于是由(14)式可知 $d=p_2$ 或 $2p_2$. 若 $d=p_2$,则由(15)式可知 $6-d=1$,从而 $d=p_2=5$ 且 $n=10$. 若 $d=2p_2$,则由(15)式可知 $6-d=2$,从而 $d=4$,故 $p_2=2$,此与 p_2 是奇素数矛盾.

ii) 若 $\alpha_2\geq 2$,且 $d=p_2^{\alpha_2-1}$ 或 $2p_2^{\alpha_2-1}$,则由方程(13)可得

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+2\cdot(-1)^{\Omega(n)}=6p_2 \text{ 或 } 3p_2. \quad (16)$$

注意到 $\alpha_2\geq 2$,此时对(16)式两边取模 p_2 可得 $p_2\mid 2\cdot(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_2 为奇素数矛盾,故 $d=p_2^{\alpha_2}$ 或 $2p_2^{\alpha_2}$. 而由 $d=p_2^{\alpha_2}$ 以及(13)式可得 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=4$ 或 8. 若 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=4$,则 $p_2=2, \alpha_2=3$ 或 $p_2=5, \alpha_2=1$,此与 $\alpha_2\geq 2$ 且 p_2 为奇素数矛盾. 同理可得 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=8$ 无解. 由 $d=2p_2^{\alpha_2}$ 以及(13)式可得 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=1$ 或 5,但 $p_2^{\alpha_2-1}$

(p_2-1)为偶数,矛盾.故此时方程(2)无解.

2)当 $\alpha_1\geq 2$ 时,即 $n=2^{\alpha 1}p_2^{\alpha_2}$.注意到 d 是 n 的正因子,不妨设 $d=2^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$,其中 $0\leq\beta_i\leq\alpha_i(i=1,2)$,奇素数 $p_2\equiv 2(\bmod 3)$.故由(12)式可得

$$2^{\beta_1+\alpha_1-1}p_2^{\beta_2}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+2^{\beta_1+1}p_2^{\beta_2}(-1)^{\Omega(n)}=3\cdot 2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2},\tag{17}$$

对(17)式两边取模 $p_2^{\alpha_2-1}$ 可得 $\alpha_2-1\leq\beta_2\leq\alpha_2$.此时对比(17)式两边 2 的个数,可得 $\alpha_1=\beta_1+1\geq 2$,从而有

$$2^{\beta_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p_2^{\alpha_2-\beta_2},\tag{18}$$

其中 $\beta_1\geq 1$ 且 $\alpha_2-\beta_2=0$ 或 1.

i)若 $\alpha_2-\beta_2=0$,则由(18)式可得

$$2^{\beta_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3,$$

即

$$2^{\beta_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=2\ 或\ 4.$$

若 $2^{\beta_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=2$,由于 $\beta_1\geq 1$,故 $(\beta_1,\alpha_2,p_2)=(1,2,2)$或$(2,1,2)$,此与奇素数 $p_2\equiv 2(\bmod 3)$矛盾.故只能有 $2^{\beta_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(P_2-1)=4$,从而$(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,p_2)=(2,1,1,1,5)$,即$(n,d)=(20,10)$.

ii) 若 $\alpha_2-\beta_2=1$,则由(18)式可得

$$2^{\beta_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p_2.\tag{19}$$

注意到 $\alpha_2-\beta_2=1$ 以及 $\alpha_2\geq 1$.若 $\alpha_2\geq 2$,此时对(19)式两边取模 p_2 可得 $p_2\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_2 是奇素数矛盾.故必有 $\alpha_2=1$,从而有 $\beta_2=0$.故由(19)式可得

$$2^{\beta_1-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p_2,$$

即

$$p_2=\frac{2^{\beta_1-1}\pm 1}{2^{\beta_1-1}-3}.$$

若 $p_2=\frac{2^{\beta_1-1}+1}{2^{\beta_1-1}-3}$,即 $p_2=1+\frac{4}{2^{\beta_1-1}-3}$.注意到奇素数 $p_2\equiv 2(\bmod 3)$,则必有 $2^{\beta_1-1}-3=1$,从而$(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,p_2)=(4,3,1,0,5)$,故$(n,d)=(80,8)$.

若 $p_2=\frac{2^{\beta_1-1}-1}{2^{\beta_1-1}-3}$,即 $p_2=1+\frac{2}{2^{\beta_1-1}-3}$.故 $2^{\beta_1-1}-3=1$ 或 2,即 $2^{\beta_1-1}=4$ 或 5,,从而 $\beta_1=3$ 且 $p_2=3$,此与 $p_2\equiv 2(\bmod 3)$矛盾.故此时方程(2)无解.

情形二:当 $\alpha=1$ 时,即 $n=3p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$.由题设条件及(1)式可得

$$\frac{2p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}\cdot 2^{3-1-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{3p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}}{d},$$

即

$$2d\cdot p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)+2d\cdot(-1)^{\Omega(n)}=9p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}.\tag{20}$$

注意到(20)式的左边是偶数,故右边必有一个素因子是 2,不妨设 $p_1=2$,即 $n=3\cdot 2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,其中奇素数 $p_2\equiv 2(\bmod 3)$故由(20)式可得

$$d\cdot 2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+2d\cdot(-1)^{\Omega(n)}=9\cdot 2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}.\tag{21}$$

1)当 $\alpha_1=1$ 时,即 $n=6p_2^{\alpha_2}$.故由(21)式可得

$$d\cdot p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+d\cdot(-1)^{\Omega(n)}=9p_2^{\alpha_2},\tag{22}$$

于是必有 $p_2^{\alpha_2-1}\mid d$.又因为 $d\mid n=6p_2^{\alpha_2}$ 且 $d\mid n=9p_2^{\alpha_2}$,故

$$d=p_2^{\alpha_2-1},3p_2^{\alpha_2-1},p_2^{\alpha_2}\ 或\ 3p_2^{\alpha_2}\tag{23}$$

i)若 $\alpha_2=1$,即 $n=6p_2$,则 $\Omega(n)=3$.此时由(22)式可得

$$(d-9)p_2=2d>0.\tag{24}$$

故 $d>9$ 且 $p_2\mid 2d$,于是由(23)式可知 $d=p_2$ 或 $3p_2$.若 $d=p_2$,则由(24)式可知 $d-9=2$,从而 $d=p_2=11$ 且 $n=66$.若 $d=3p_2$,则由(24)式可知 $d-9=6$,从而 $d=15$,故 $p_2=5$ 且 $n=30$.

ii)若 $\alpha_2\geq 2$,且 $d=p_2^{\alpha_2-1}$ 或 $d=3p_2^{\alpha_2-1}$,则由(22)式可得

$$p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9p_2\ 或\ 3p_2.\tag{25}$$

注意到 $\alpha_2\geq 2$,对(25)式两边取模 p_2 可得 $p_2\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_2 是素数矛盾.故必有 $d=p_2^{\alpha_2}$ 或 $d=3p_2^{\alpha_2}$.由 $d=p_2^{\alpha_2}$ 以及(22)式可得 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=8$ 或 10.若 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=10$,则 $\alpha_2=1$ 且 $p_2=11$,此与 $\alpha_2\geq 2$ 矛盾.故只能有 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=8$,即 $\alpha_2=4$ 且 $p_2=2$,此与 p_2 为奇素数矛盾.由 $d=3p_2^{\alpha_2}$ 以及(22)式可得 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=2$ 或 4.若 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=2$,则 $\alpha_2=2$ 且 $p_2=2$,此与 p_2 为奇素数矛盾.若 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=4$,则 $\alpha_2=3,p_2=2$ 或 $\alpha_2=1,p_2=5$,此与 $\alpha_2\geq 2$ 且奇素数 $p_2\equiv 2(\bmod 3)$矛盾.

2)当 $\alpha_1\geq 2$ 时,即 $n=3\cdot 2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$.注意到 d 是 n 的正因子,不妨设 $d=2^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$ 或 $d=3\cdot 2^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$,其中 $0\leq\beta_i\leq\alpha_i(i=1,2)$.

1°)若 $d=3\cdot 2^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$,则由(21)式可得

$$2^{\beta_1+\alpha_1}p_2^{\beta_2}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+2^{\beta_1+1}p_2^{\beta_2}(-1)^{\Omega(n)}=3\cdot 2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}.\tag{26}$$

对(26)式两边取模 $p_2^{\alpha_2-1}$ 可得 $\alpha_2-1\leq\beta_2\leq\alpha_2$.此时对比(26)式两边 2 的个数,可得 $\alpha_1=\beta_1+1\geq 2$,从而

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p_2^{\alpha_2-\beta_2},\tag{27}$$

其中 $\beta_1\geq 1$ 且 $\alpha_2-\beta_2=0$ 或 1.

i)或 $\alpha_2-\beta_2=0$,则由(27)式可得

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3,$$

即

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=2\ 或\ 4.$$

若 $2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=2$,则 $\beta_1=1,\alpha_2=1$ 且 $p_2=2$,此与 p_2 为奇素数矛盾.

若 $2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=4$,即 $\beta_1=2,\alpha_2=1$ 且 $p_2=2$ 或 $\beta_1=1,\alpha_2=2$ 且 $p_2=2$,均与 p_2 为奇素数矛盾.

ii) 若 $\alpha_2-\beta_2=1$,则由(27)式可得

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p_2. \tag{28}$$

注意到 $\alpha_2-\beta_2=1$ 以及 $\alpha_2\ge1$. 若 $\alpha_2\ge2$,此时对(28)式两边取模 p_2 可得 $p_2\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_2 是奇素数矛盾. 故必有 $\alpha_2=1$,从而 $\beta_2=0$,此时由(28)式可得

$$2^{\beta_1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3p_2,$$

即

$$p_2=\frac{2^{\beta_1}\pm1}{2^{\beta_1}-3}.$$

若 $p_2=\frac{2^{\beta_1}+1}{2^{\beta_1}-3}$,即 $p_2=1+\frac{4}{2^{\beta_1}-3}$. 由于奇素数 $p_2\equiv2\pmod 3$,则必有 $2^{\beta_1}-3=1$,从而 $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,p_2)=(3,2,1,0,5)$,故 $(n,d)=(120,12)$.

若 $P_2=\frac{2^{\beta_1}-1}{2^{\beta_1}-3}$,即 $p_2=1+\frac{2}{2^{\beta_1}-3}$. 故 $2^{\beta_1}-3=1$ 或 2,即 $2^{\beta_1}=4$ 或 5. 从而 $\beta_1=2$ 且 $p_2=3$,此与奇素数 $p_2\equiv2\pmod 3$ 矛盾,故此时方程式(2)无解.

2°)若 $d=2^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$,则由(21)式可得

$$2^{\beta_1+\alpha_1}p_2^{\beta_2}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+2^{\beta_1+1}p_2^{\beta_2}(-1)^{\Omega(n)}=9\cdot2^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}, \tag{29}$$

对(29)式两边取模 $p_2^{\alpha_2-1}$ 可得 $\alpha_2-1\le\beta_2\le\alpha_2$. 此时对比(29)式两边 2 的个数可得 $\alpha_1=\beta_1+1\ge2$,故由(29)式可得

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9p_2^{\alpha_2-\beta_2}, \tag{30}$$

其中 $\beta_1\ge1$ 且 $\alpha_2-\beta_2=0$ 或 1.

i) 若 $\alpha_2-\beta_2=0$,则由(30)式可得

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9,$$

即

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=8\text{ 或 }10.$$

若 $2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=10$,即 $2^{\beta_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=5$,注意到 $\beta_1\ge1$ 且 p_2 是奇素数,则该式显然不成立. 从而只能有 $2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)=8$,此时 $(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,p_2)=(2,1,1,1,5)$,即 $(n,d)=60,10$.

ii) 若 $\alpha_2-\beta_2=1$,则由(30)式可得

$$2^{\beta_1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9p_2. \tag{31}$$

注意到 $\alpha_2-\beta_2=1$ 以及 $\alpha_2\ge1$. 若 $\alpha_2\ge2$,则对(30)式两边取模 p_2 可得 $p_2\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_2 是奇素数矛盾. 故必有 $\alpha_2=1$,从而 $\beta_2=0$. 此时由(30)式可得

$$2^{\beta_1}(p_2-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9p_2,$$

即

$$p_2=\frac{2^{\beta_1}\pm1}{2^{\beta_1}-9}.$$

若 $p_2=\frac{2^{\beta_1}\pm1}{2^{\beta_1}-9}$,即 $p_2=1+\frac{10}{2^{\beta_1}-9}$. 由于奇素数 $p_2\equiv2\pmod 3$,则必有 $2^{\beta_1}-9=1$,即 $2^{\beta_1}=10$ 矛盾. 故必有 $p_2=\frac{2^{\beta_1}-1}{2^{\beta_1}-9}$,即 $p_2=1+\frac{8}{2^{\beta_1}-9}$,此时由于奇素数 $p_2\equiv2\pmod 3$,则可得 $2^{\beta_1}-9=2$,即 $2^{\beta_1}=11$ 矛盾. 故此时方程(2)无解.

这就证明了定理 4 的(1).

(2) 分以下两种情形.

(Ⅰ)当 $k>2$ 且 $\alpha=0$ 时,即 $n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$,此时由题设条件及(1)式可得

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{k-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d},$$

即

$$d\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_1-1}(p_i-1)+d(-1)^{\Omega(n)}2^{k-1}=3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}. \tag{32}$$

注意到(32)式的左边是偶数,故必存在某个 $p_i=2$,不妨设 $p_1=2$,即 $n=2_1^{\alpha}\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}$,其中奇素数 $p_i\equiv2\pmod 3$ $(\forall i=2,\cdots,k)$,则由(32)式可得

$$d\cdot2^{\alpha_1-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+d(-1)^{\Omega(n)}2^{k-1}=3\cdot2^{\alpha_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}. \tag{33}$$

注意到 d 是 n 的正因子,不妨设 $d=2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}$,其中对于任意 $i=1,\cdots,k$, $0\le\beta_i\le\alpha_i$ 且对于任意 $i=2,\cdots,k$,奇素数 $p_i\equiv2\pmod 3$. 则由(33)式可得

$$2^{\alpha_1+\beta_1-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\beta_1+k-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i-1}=3\cdot2^{\alpha_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}, \tag{34}$$

对(34)式两边取模 $p_i^{\alpha_i-1}$ 可得 $\alpha_i-1\le\beta_i\le\alpha_i$ $(\forall i=2,\cdots,k)$. 此时对比(34)式两边 2 的个数可得 $\alpha_1=\beta_1+k-1$. 于是由(34)式可得

$$2^{\beta_1-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}, \tag{35}$$

其中对于任意 $i=2,\cdots,k$,有 $\alpha_i-\beta_i=0$ 或 1.

1)若对任意 $i=2,\cdots k$,无有 $\alpha_i-\beta_i=0$,则由(35)式可得

$$2^{\beta_1-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3, \tag{36}$$

即

$$2^{\beta_1-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2\text{ 或 }4. \tag{37}$$

注意到 $k>2$ 且对任意 $i=2,\cdots,k$,使得奇素数 $p_i\equiv2\pmod 3$. 故 $\beta_1=0,1$ 或 2. 由 $\beta_1=0$ 以及(37)式可得 $\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=4$ 或 8. 若 $\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=4$,此时 $\alpha_2=1,p_2=5$ 或 $\alpha_2=3,p_2=2$,此与 $k>2$ 矛盾. 同理可得 $\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=8$ 无解. 由 $\beta_1=1$ 以及(37)式可得

$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2$ 或 4. 若$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2$,此时 $\alpha_2=2$ 且 $p_2=2$,此与 $k>2$ 矛盾. 同理可得$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=4$ 无解. 故 $\beta_1=2$,此时$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=1$ 或 2,因$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$为偶数,故必有$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2$,从而 $\alpha_2=2$ 且 $p_2=2$,此与 $k>2$ 矛盾.

2)若存在 $j=2,\cdots,k$,使得 $\alpha_j-\beta_j=1$. 又由题设条件知 $\alpha_j\geq1$. 若 $\alpha_j\geq2$,对(35)式两边取模 p_j 可得 $p_j\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_j 是奇素数矛盾. 故必有 $\alpha_j=1$,从而 $\beta_j=0$. 即若方程(2)有解,则 $2^{\beta_1-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}$ 有解.

(Ⅱ)当 $k>2$ 且 $\alpha=1$ 时,即 $n=3\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}$. 由题设条件及(1)式可得

$$\frac{2\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{k-1}}{3}=\frac{\varphi(n)}{3}+\frac{(-1)^{\Omega(n)}2^{\omega(n)-\alpha-1}}{3}=\frac{n}{d}=\frac{3\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}}{d},$$

$$2d\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_1-1}(p_i-1)+d(-1)^{\Omega(n)}2^{k-1}=9\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}. \quad (38)$$

注意到(38)式的左边是偶数,故必存在某个 $p_i=2$,不妨设 $p_1=2$,即 $n=3\cdot2^{\alpha_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}$,其中奇素数 $p_i\equiv2(\bmod 3)(\forall i=2,\cdots,k)$,此时由(38)式可得

$$d\cdot2^{\alpha_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+d(-1)^{\Omega(n)}2^{k-1}=9\cdot2^{\alpha_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}. \quad (39)$$

因为 d 是 n 的正因子,故可设 $d=2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}$ 或 $d=3\cdot2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}$,其中对于任意 $i=1,\cdots,k$,$0\leq\beta_i\leq\alpha_i$,且对于任意 $i=2,\cdots,k$,奇素数 $p_i\equiv2(\bmod 3)$.

1°)若 $d=2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}$,则由(39)式可得

$$2^{\alpha_1+\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\beta_1+k-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}=9\cdot2^{\alpha_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}, \quad (40)$$

对(40)式两边取模 $p_i^{\alpha_i-1}$ 可得 $\alpha_i-1\leq\beta_i\leq\alpha_i(\forall i=2,\cdots,k)$. 此时对比(40)式两边 2 的个数可得 $\alpha_1=\beta_1+k-1$,于是由(40)式可得

$$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}, \quad (41)$$

其中对任意 $i=2,\cdots,k$,有 $\alpha_i-\beta_i=0$ 或 1.

i)若对任意 $i=2,\cdots,k$,均有 $\alpha_i-\beta_i=0$,则由(41)式可得

$$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9 \quad (42)$$

即

$$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=8 \text{ 或 } 10.$$

若 $2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=8$,则$(\beta_1,\alpha_2,p_2)=(1,3,2)$,$(2,2,2)$,$(1,1,5)$或$(0,4,2)$,此与 $k>2$ 矛盾.

若 $2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=10$,则 $\beta_1=0$,$\alpha_2=1$ 且 $p_2=11$,此与 $k>2$ 矛盾.

ii)若存在 $j=2,\cdots,k$,使得 $\alpha_j-\beta_j=1$,又由题设条件知 $\alpha_j\geq1$. 若 $\alpha_j\geq2$,对(41)式两边取模 p_j 可得 $p_j\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_j 是奇素数矛盾. 故必有 $\alpha_j=1$,从而 $\beta_j=0$. 即若方程(2)有解,则 $2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=9\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}$ 有解.

2°)若 $d=3\cdot2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}$,则由(38)式可得

$$2^{\alpha_1+\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i+\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}2^{\beta_1+k-1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\beta_i}=3\cdot2^{\alpha_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i}, \quad (43)$$

对(43)式两边取模 $p_i^{\alpha_i-1}$ 可得 $\alpha_i-1\leq\beta_i\leq\alpha_i(\forall i=2,\cdots,k)$. 此时对比(43)式两边 2 的个数可得 $\alpha_1=\beta_1+k-1$. 于是由(43)式可得

$$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}, \quad (44)$$

其中对于任意 $i=2,\cdots,k$,有 $\alpha_i-\beta_i=0$ 或 1.

i)若对任意 $i=2,\cdots,k$,均有 $\alpha_i-\beta_i=0$,则由(44)式可得

$$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}=3, \quad (45)$$

即

$$2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2 \text{ 或 } 4. \quad (46)$$

注意到 $k>2$ 且 $p_i\equiv2(\bmod 3)(\forall i=2,\cdots,k)$为奇素数,故若 $2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2$,则 $\beta_1=0$. 此时可得$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2$,从而 $\alpha_2=2$,$p_1=2$,此与 $k>2$ 矛盾. 若 $2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=4$,故 $\beta_1=0$ 或 1. 由 $\beta_1=0$ 以及(46)式可得$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=4$,从而 $\alpha_2=1$,$p_1=5$ 或 $\alpha_2=3$,$p_1=2$,此与 $k>2$ 矛盾. 故 $\beta_1=1$,此时$\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=2$,从而 $\alpha_2=2$,$p_1=2$,此与 $k>2$ 矛盾.

ii)若存在 $j=2,\cdots,k$,使得 $\alpha_j-\beta_j=1$. 又由题设条件知 $\alpha_j\geq1$. 若 $\alpha_j\geq2$,对(44)式两边取模 p_j 可得 $p_j\mid(-1)^{\Omega(n)}$,此与 p_j 是奇素数矛盾. 故必有 $\alpha_j=1$,从而 $\beta_j=0$. 即若方程(2)有解,则 $2^{\beta_1}\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)+(-1)^{\Omega(n)}$

$=3\prod_{i=2}^{k}p_i^{\alpha_i-\beta_i}$,有解.

这就证明了定理 4 的(2).

2　结束语

为将 Lehmer 同余式的模从素数的平方推广到任意整数的平方的情形,蔡天新等[9-11]定义了广义欧拉函数 $\varphi_e(n)$,并且给出 $\varphi_e(n)(e=1,2,3,4,6)$ 的准确计算公式,这些公式为讨论广义欧拉函数的性质及应用带来了很多方便.进而,利用这些公式讨论了 $\varphi_e(n)$ 和 $\varphi_e(n+1)$ 同为奇数时 n 满足的条件.

本文基于 $\varphi_e(n)(e=1,2,3,4,6)$ 的证明,给出一些特殊的正整数 n 相应的方程 $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ 有解的必要条件.但一般情形下 $\varphi_e(n)$ 的准确计算公式并没有完全确定,有待进一步研究.

参考文献:

[1] Kenneth Ireland, Michael Rosen. A classical introduction to Modern Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

[2] GuyR, Unsolved problems in Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2004.

[3] 李铁牛,李红达.基于欧拉函数秘密分享的 RSA 私钥的理性分布计算[J].计算机工程与科学, 2010, 32(9): 11-17.

[4] 谢健全,杨春华,RSA 算法中几种可能泄密的参数选择[J].计算机工程, 2006, 32(16): 118-119.

[5] 陈少真,密码学基础[M].北京:科学出版社, 2008.

[6] 任伟,现代密码学[M].北京:北京邮电大学出版社, 2011.

[7] Cai T X. A congruence involving the quotients of Euler and its applications(I)[J]. Acta Aritmetica, 2002, 103(4): 313-320.

[8] Cai T X, Fu X D, Zhou X. A congruence involving the quotients of Euler and its applications(II)[J]. Acta Aritmetica, 2007, 130(3): 203-214.

[9] Cai T X, Shen Z Y, Hu M J. On the Parity of the Generalized Euler Function[J].数学进展, 2013, 42(4): 505-510.

[10] 丁煜.广义欧拉函数及其性质[D]。浙江:浙江大学, 2008.

[11] Shen Z Y, Cai T X, Hu M J. On the Parity of the Generalized Euler Function(II)[J].数学进展, 2016.

[12] 吕志宏.一个包含 Euler 函数的方程[J].西北大学学报, 2006, 36(1): 17-20.

[13] 田呈亮,付静,白维祖.一个包含欧拉函数的方程[J].纯粹数学与应用数学, 2010, 26(1): 96-98.

[14] 俞红玲,沈忠燕.与广义欧拉函数有关的方程[J].浙江外国语学院学报, 2012, (3): 96-98.

[15] 金明艳,沈忠燕.方程 $\varphi_2(n)=2^{\Omega(n)}$ 和 $\varphi_2(\varphi_2(n))=2^{\Omega(n)}$ 的可解性[J].浙江外国语学院学报, 2013, (4): 47-52.

On the Solvability of the Equation $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$

WANG Rong, LUO Wen-li, LIAO Qun-ying

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: In order to generaliz Lehmer's congruences from modulo prime squares to modulo integer squares, Cai, et al, defined the generalized Euler function. By using elementary methods, the equation $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ related with the generalized Euler function $\varphi_3(n)$ is studied, where n is a positive integer and d is a positive factor of n. For the positive ingteger $n=p^\beta, 3p^\beta, p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}, 3p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, all solutions for the Diophantine equation $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ are given, where $\beta\geq 1$ and the prime $p\equiv 2\pmod 3$, $\alpha_i\geq 1$ and the primes $p_i\equiv 2\pmod 3\ (i=1,2)$. Several necessary conditions for the solvability of the equation $\varphi_3(n)=\frac{n}{d}$ are obtained, when $n=3^\alpha\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$, with $\alpha=0$ and some primes $p_i\equiv 1\pmod 3$, or $n=3^\alpha\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}>3$ with $k>2$, $\alpha\in\{0,1\}$, $\alpha_i\geq 1$ and $p_i\equiv 2\pmod 3\ (i=1,\cdots,k)$ are primes.

Keywords: applied mathematics; applied number theory; generalized euler function; equation; positive integer solution; Möbius function; congruence