文章编号: 2096-1618(2017)01-0102-05

地下水非稳定流的灵敏度分析

吴 勇[1,2], 杜 娟[3], 翁云华[3]

(1. 成都理工大学环境与土木工程学院,四川 成都 610059;2. 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室(地下水科学研究与开发中心),四川 成都 610059;3. 成都理工大学应用数学系,四川 成都 610059)

摘要:地下水非稳定流的灵敏度分析,首先建立一个二维饱和状态下非均匀多孔介质非稳定地下水流模型,利用伴随法计算状态变量水头关于模型参数(渗透系数和贮水系数)的灵敏度,并分析参数域在自相关或者不相关情况下获得灵敏度分析的方法论. 用伴随法首先是要求解伴随方程,然后从稳态流动方程中解水头初始值,再利用初始边界求解非稳定流中的水头值和状态变量及初始状态变量的值,最后,水头关于系统参数灵敏度分析就可以表示出来. 这些解析式可以更有效的计算灵敏度,也会对基于非稳定流模型的分析比较有用,这种分析方法不仅仅局限于地下水的应用方面,还可以扩展到其他类似的控制方程和类似概念条件的数学问题中.

关 键 词:地下水;灵敏度分析;非稳定流;最优化

中图分类号:O177.92　　**文献标志码**:A

doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2017.01.018

0 引言

地下水动力学是水文地质学的重要组成部分[1],它的任务是对地下水量和质进行计算,为地下水的评价和管理提供科学依据。通过非稳定抽水试验[2]可以求含水层的导水系数(T)、压力传导系数(a)、渗透系数(K),及给水度(μ)或释水系数(S),井流问题是地下水动力学研究中最经典和最具实用性的问题之一。伴随法是基于已经成功应用于很多领域的变分法[3],比如电气工程、气象学、海洋地理学、核反应堆的评估、水文地质学、石油工程和地震学。参数灵敏度的一种有效计算方法是求解伴随方程,伴随方程是从原始控制方程中推导出来并且结构和原始方程相似。事实上,通过伴随方程的解可以得到伴随状态变量,表示反向时间的水头响应函数的一个单位脉冲源在观测位置和观测时间受均匀初始边界条件的限制,因此,需要的计算量依赖于观测值的数量表,而不是参数的数目。对于任何具有 M 个观测值的问题,只需要求解一次原始控制方程和求解 M 次对偶方程。对于非稳定测量问题[4],对偶方程只需要在每一个观测地点从观测时间的最大值到零来求解,因此,求解伴随方程的次数就是观测地点的数量。这是因为在任意其他观测时间对于每一个观测地点获得伴随状态变量可以通过对沿着时间轴的观测时间的最大值转换求解,而不用再一次去求解伴随方程。利用伴随状态变量可以估计在任意地点 X 处状态变量关于参数的灵敏度. 灵敏度通常表现为在时间域和空间上积分,当被积函数和水头函数及伴随状态变量的偏导数有关,这时积分就可以进行数值计算[5]。主要目的是研究一种新颖的分析方法,即在外界环境和抽水条件下的随机不均匀含水层非稳定态地下水的情况下,根据在自相关或者不相关有限空间上利用伴随法计算水头函数关于分布式渗透系数和储水系数的灵敏度。这种方法论是基于伴随法适用于一个有界含水层中一系列井抽水(他们当中的每一个井也许有一个或者更多个恒定速率的抽水周期)的非稳定流。这个课题研究和以前所有基于伴随的水头灵敏度研究最主要的区别是考虑了参数域空间的相关性,然而在之前研究的参数域都是被假设为不相关的,并且在整个问题区域上积分化简得到需要的灵敏度。用伴随法求参数灵敏度的特点就是可以获得数值,提出这些灵敏度的表达式是对于在一个恒定水头和不渗透边界特殊矩形域的情况下。但是,它可以被扩展到三维空间的问题中去。

1 非稳定地下流模型

考虑二维饱和状态下非均匀多孔介质非稳定的地下水流问题,可描述为:

$$\nabla\cdot[T(X)\nabla h(X,t)]+\sum_{i=1}^{n_w}Q_i\delta(X-X_i^p)l(t_i^s,t_i^e)=S(X)\frac{\partial h(X,t)}{\partial t},X\in\Omega,t>0,\qquad(1)$$

收稿日期:2016-06-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171046);地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室自主研究课题资助项目(SKLGP2009Z006);四川省科技计划项目资助项目(2013HH0041)

满足一下边界条件和初始条件

$$h(X,t)=H(X),\quad X\in\Gamma_D,\quad t>0,\tag{2}$$

$$-T(X)\nabla h(X,t)\cdot\vec{n}=q(X),X\in T_N,t>0,\tag{3}$$

$$h(X,t)=h_0(X),X\in\Omega,t=0,\tag{4}$$

其中 $h[m]$ 是水头, $H[m]$ 规定为在狄利克雷边界条件 Γ_D 下的定水头,$q[m/s]$ 规定为在边界条件 Γ_N 上的水通量,$h_0[m]$ 是在区域 Ω 上初始水头值,$T[m^2/s]$ 是渗透系数,S 是贮水系数,n_w 是抽水或注入井的数量,$Q_i[m^3/s]$ 是在位置 $X_i^p=(x_{i1}^p,x_{i2}^p)$ 第 i^{th} 井的抽水率,$l(t_i^s,t_i^e)$ 是指示函数(当 $t\in(t_i^s,t_i^e)$,函数值为 1,其他情况函数值为 0),t_i^s,t_i^e 分别指的是在第 i^{th} 个井开始抽水时间和结束时间,δ 是狄利克雷函数,$X=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ 是水平笛卡尔坐标,t 代表时间,$\vec{n}$ 是有界区域 $\Gamma=\Gamma_D\cup\Gamma_N$ 内的单位向量。

在灵敏度分析中,引入一个响应函数写为[6-7]:

$$J(G)=\int_0^{T_e}\int_\Omega G(h,p)\,\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t,\tag{5}$$

其中 Ω 表示空间区域, T_e 是仿真时间的结束点,G 是关于水头 h 的一般函数,h 是一个系统参数(指渗透系数 $Y=\ln(T)$ 或者贮水系数 $Z=\ln(S)$)。

对关于任意参数 p 的函数 J 的边际灵敏度可以通过式(5)关于参数 p 求偏导得到:

$$\frac{\partial J}{\partial p}=\int_0^{T_e}\int_\Omega\left(\frac{\partial G(h,p)}{\partial p}+\frac{\partial G(h,p)}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial p}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t,\tag{6}$$

由式(6)可以看出,第一项表示 $J(G)$ 和参数 p 有清楚明确的依赖性,即直接关系,然而第二项是“间接关系”,因为 $J(G)$ 和参数 p 是通过水头 h 联系起来的。为计算水头函数 h 关于渗透系数或者贮水系数的灵敏度,选择函数如下:

$$G=h(X,t)\delta(X-X_k)\delta(t-t_1)+\nabla\cdot[T(X)\nabla h(X,t)]\delta(X-X_k)\delta(t-t_1)\tag{7}$$

即观测水头地点在 $X_k=(x_{1k},x_{2k})^{\mathrm{T}}$,时间为 t_1,对这个特定的特殊函数 G 而言,$\frac{\partial G}{\partial p}=0$ 且 $\frac{\partial G}{\partial h}=[1+\nabla T(X)]\delta(X-X_k)\delta(t-t_1)$,把这两项带入式(6)就化简为

$$\frac{\partial J}{\partial p}=\int_0^{T_e}\int_\Omega\varphi[1+\nabla T(X)]\delta(X-X_k)\delta(t-t_1)\,\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t\tag{8}$$

其中 $\varphi=\partial h/\partial t$ 是系统灵敏度,因为狄利克雷函数的性质,寻找的边际灵敏度实际就是 $\partial h(X_k,t_1)/\partial p$。

2　用伴随法求解灵敏度式

对式(1)关于参数 p (渗透系数 Y 或者贮水系数 Z)求偏导得

$$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial t}+S\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\nabla\cdot\left[\frac{\partial T}{\partial p}\nabla h\right]-\nabla\cdot[T\nabla\varphi]=0\tag{9}$$

给式(9)式乘以一个任意的可微函数 φ^* 并且对空间和时间进行积分得到[6-8]:

$$\int_0^{T_e}\int_\Omega\left[\frac{\partial S\partial h}{\partial p\partial t}+S\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\nabla\cdot\left[\frac{\partial T}{\partial p}\nabla h\right]-\nabla\cdot[T\nabla\varphi]\right]\varphi^*\,\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t=0\tag{10}$$

对第二项用分部积分法,对第三项用一次格林公式和对第四项用两次格林公式得到:

$$\int_0^{T_e}\int_\Omega\left[-S\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}-\nabla\cdot(T\nabla\varphi^*)\right]\varphi\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial T}{\partial p}\nabla h\cdot\nabla\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial S}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_0^{T_e}\int_{T_N}\varphi T\nabla\varphi^*\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t$$
$$-\int_0^{T_e}\int_{\Gamma_D}\varphi^*\left[T\nabla\varphi+\frac{\partial T}{\partial p}\nabla h\right]\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t+\int_\Omega S\varphi\varphi^*|_{t=T_e}\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega S\varphi\varphi^*|_{t=0}\mathrm{d}\Omega=0\tag{11}$$

推导式(11)的过程中用了在 Γ_N 上对边界条件式(3)求偏导可以得到关系

$$(\partial T/\partial p)\nabla h\cdot\vec{n}=-\partial q/\partial p-T\nabla\varphi\cdot\vec{n}=-T\nabla\varphi\cdot\vec{n}$$

假如把式(11)左边的全部项数加到式(8)的右边,则边际灵敏度变为:

$$\frac{\partial G}{\partial p}=\int_0^{T_e}\int_\Omega\{[1+\nabla T(X)]\delta(X-X_k)\delta(t-t_1)-S\frac{\partial\varphi^*}{\partial t}-\nabla\cdot(T\nabla\varphi^*)\}\varphi\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial T}{\partial p}\nabla h\cdot\nabla\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial t}\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\iint_{0\ \Gamma_N}^{T_e}\varphi T\nabla\varphi^*\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Gamma dt-\int_0^{T_e}\int_{\Gamma_D}\varphi^*[T\nabla\varphi+$$
$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}\nabla h]\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Gamma\mathrm{d}t+\int_\Omega S\varphi\varphi^*|_{t=T_e}-\int_\Omega S\varphi\varphi^*|_{t=0}\mathrm{d}\Omega\tag{12}$$

因为系统灵敏度 φ 是未知的,要估计式(12),就需要设定 φ 前面的系数等于 0,即式(12)中的第一项,为了简化式(12),选择任意函数 φ^* 满足方程式

$$\nabla\cdot[T(X)\nabla\varphi^*(X,t)]-[1+\nabla T(X)]\delta(X-X_k)\delta(t-t_1)=S(X)\frac{\partial\varphi^*(X,t)}{\partial t},X\in\Omega,t>0\tag{13}$$

边界和终端条件如下:

$$\varphi^*(X,t)=0,\quad X\in\Gamma_D,\quad t>0,\tag{14}$$

$$-T\nabla\varphi^*(X,t)\cdot\vec{n}=0,\quad X\in\Gamma_N,\quad t>0,\tag{15}$$

$$\varphi^*(X,t)=0,\quad X\in\Omega,\quad t=T_e\tag{16}$$

这样边际灵敏度式(12)就可以化简为:

$$\frac{\partial J}{\partial p}=\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial T}{\partial p}\nabla h\cdot\nabla\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial t}\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t-\int_\Omega S\varphi\varphi^*|_{t=0}\mathrm{d}\Omega\tag{17}$$

方程式(13)和条件(14)~(16)就叫做伴随方程。

2.1 初始水头在稳定流中的边际灵敏度

假设初始水头满足下面的稳定流方程

$$\nabla\cdot[T(X)\nabla h_0(X)]=0 \tag{18}$$

这个方程和非稳定流满足相同的边界条件:

$$h_0(X)=H(X),X\in\Gamma_D$$

$$-T(X)\nabla h_0(X)\cdot\vec{n}=q(X),X\in\Gamma_N$$

做和非稳定流相同的操作步骤,即对式(18)关于参数γ求偏导,然后求偏导后的式子整体乘以任意函数φ_0^*并在区域Ω上对这个式子积分,最后用格林第一公式得:

$$\int_\Omega\varphi_0\nabla\cdot(T\nabla\varphi_0^*)\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega\frac{\partial T}{\partial\gamma}\nabla h_0\cdot\nabla\varphi_0^*\mathrm{d}\Omega-\int_{T_N}\varphi_0T\nabla\varphi_0^*\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_D}\frac{\partial q}{\partial Y}\varphi_0^*\mathrm{d}\Gamma=0, \tag{19}$$

其中,$\varphi_0=\frac{\partial h_0}{\partial\gamma}$。要注意的是,在对上面方程最后两项求导的过程中,实际上已经用了$\varphi_0\equiv0,X\in\Gamma_D$和$\partial q/\partial\gamma\equiv0,X\in\Gamma_N$。通过把式(19)加到式(17)上并且选择一个函数φ_0^*满足

$$\nabla\cdot[T(X)\nabla\varphi_0^*(X)]+S\varphi^*(X,0)=0 \tag{20}$$

满足下面的边界条件

$$\varphi_0^*(X)=0,\quad X\in\Gamma_D, \tag{21}$$

$$-T\nabla\varphi_0^*(X)\cdot\vec{n}=0,\quad X\in\Gamma_N \tag{22}$$

边际灵敏度式(17)变为

$$\frac{\partial J}{\partial p}=\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial T}{\partial p}\nabla h\cdot\nabla\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial h}{\partial t}\varphi^*\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t+\int_\Omega\frac{\partial T}{\partial\gamma}\nabla h_0\cdot\nabla\varphi_0^*d\Omega \tag{23}$$

只有当参数p是导水系数时,式(23)的最后一项是适用的。

2.2 不相关区域的灵敏度

如果获得$h,h_0,\varphi^*,\varphi_0^*$,水头函数$h$在位置$X_k$和时间$t_1$关于渗透系数$Y$或者贮水系数$Z$在任意一点$X=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\Omega$的灵敏度可以从式(23)得到,参数$p$可以被渗透系数$Y=\ln(T)$或者贮水系数$Z=\ln(S)$代替. 如果假定$Y$和$Z$是不相关的,这时

$$y^{(k,l)}(X)\triangleq\frac{\partial h(X_k,t_1)}{\partial Y(X)}=\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial T(\chi)}{\partial Y(X)}\nabla h(\chi,t)\cdot\nabla\varphi(\chi,t)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}t+\int_\Omega\frac{\partial T(\chi)}{\partial Y(X)}\nabla h_0(\chi)\cdot\nabla\varphi_0^*(\chi)\mathrm{d}\chi \tag{24}$$

和

$$z^{(k,l)}(X)\triangleq\frac{\partial h(X_k,t_1)}{\partial Z(X)}=\int_0^{T_e}\int_\Omega\frac{\partial S(\chi)}{\partial Z(X)}\cdot\frac{\partial h(\chi,t)}{\partial t}\varphi(\chi,t)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}t, \tag{25}$$

为方便定义$y^{(k,l)}(X)$和$z^{(k,l)}(X)$,为避免混淆,已经把$\mathrm{d}\Omega$用$d\chi$代替,因为渗透系数或者贮水系数的无穷小的变化,所以水头灵敏度的值在给的测量地点X_k和时间t_1也发生了无穷小的变化率.

状态灵敏度(23)-(25)式表明,这些灵敏度依赖于渗透系数或者储贮水系数域的自相关系数[9]。

2.2.1 水头关于渗透系数的灵敏度

通过标记

$$\frac{\partial T(\chi)}{\partial\gamma(X)}=\frac{\partial T(\chi)}{\partial Y(\chi)}\frac{\partial Y(\chi)}{\partial Y(X)}=T(\chi)\frac{\partial Y(\chi)}{\partial Y(X)},$$

式(24)可以被写作

$$y^{(k,l)}(X)=\int_0^{t_1}\int_\Omega T(\chi)\frac{\partial Y(\chi)}{\partial Y(X)}\nabla\varphi^*\cdot\nabla\bar{h}\mathrm{d}\chi\mathrm{d}t+\int_\Omega T(\chi)\frac{\partial Y(\chi)}{\partial Y(X)}\nabla\varphi^*\cdot\nabla h_0\mathrm{d}\chi. \tag{26}$$

在整个区域Ω上积分,灵敏度取决于渗透系数域的自相关性,在之前文献中,通常假设$X\neq\chi$时,$Y(\chi)$和$Y(X)$是独立的,这个表达式进一步变为

$$y^{(k,l)}(X)=\bar{T}\int_0^{t_1}\int_{\Omega_e(X)}\nabla\varphi^*(\chi,t)\cdot\nabla\bar{h}(\chi,t)\mathrm{d}\chi\mathrm{d}t+\bar{T}\int_{\Omega_e(X)}\nabla\varphi^*(\chi)\cdot\nabla h_0(\chi)\mathrm{d}\chi, \tag{27}$$

其中,$\Omega_e(X)$是对包含点X的网格元素计算,在一个均匀离散化且矩形的元素大小$\Delta x_1\times\Delta x_2$数值网格,$\Omega_e(X)$表示在点$X$处聚集的元素,注意到式(26)中的$T$和$h$已经被它们的平均数$\bar{T}$和$\bar{h}$代替了,$\bar{h}$可以利用$\bar{T}$和$\bar{S}$从(1)-(4)式的解中来获得[10],最后对时间和空间域进行积分得到:

$$y^{(k,l)}(X)=\frac{4J_0}{D}\sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty}\frac{a_n\alpha_m}{\omega_{mn}^2}u_1(\alpha_m)u_2(\beta_n)O_{mn}^k-\frac{16}{D^2\bar{T}}\sum_{\substack{m,m_1=1\\n,n_1=0}}^{\infty}\frac{a_na_{n_1}}{\omega_{mn}^2}[\alpha_m\alpha_{m_1}F_1^+(\alpha_m,\alpha_{m_1})F_2^+(\beta_n,\beta_{n_1})+\beta_n\beta_{n_1}F_1^-(\alpha_m,\alpha_{m_1})F_2^-(\beta_n,\beta_{n_1})]o_{m_1n_1}^k\sum_{i=1}^{n_w}p_{mn}^{(i)}l_T^{(i)} \tag{28}$$

其中,$J_0=(H_1-H_2)/L_1$是初始稳定状态的液压梯度,$p_{mn}^{(i)}=Q_i\sin(\alpha_mx_{i1}^p)\cos(\beta_nx_{i2}^p)$。

考虑当元素大小接近于零的一个极限情况[11],水头灵敏度可以写成

$$y^{(k,l)}(X)=\frac{4J_0}{D}\sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty}\frac{a_n\alpha_m}{\omega_{mn}^2}\cos(\alpha_mx_1)\cos(\beta_nx_2)O_{mn}^k-$$

$$\frac{16}{D^2\bar{T}}\sum_{\substack{m,m_1=1\\n,n_1=0}}^{\infty}\frac{a_n a_{n_1}}{\omega_{mn}^2}[\alpha_m\alpha_{m_1}C_4+\beta_n\beta_{n_1}S_4]O_{m_1n_1}\sum_{i=1}^{n_w}p_{mn}^{(i)}l^{(i)},\tag{29}$$

其中,$C_4=\cos(\alpha_m x_1)\cos(\alpha_{m_1}x_1)\cos(\beta_n x_2)\cos(\beta_{n_1}x_2)$. $S_4=\sin(\alpha_m x_1)\sin(\alpha_{m_1}x_1)\sin(\beta_n x_2)\sin(\beta_{n_1}x_2)$.
如果对式(23)或者式(24)最后一项贡献的研究比较感兴趣,将最后一项定义为 $y_1^{(k,l)}(X)$,它和初始水头关于渗透系数域有依赖关系,但是在以前的一些研究中[12-13]却被忽略了。

$$y_1^{(k,l)}(X)=\frac{4J_0}{D}\sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty}\frac{a_n\alpha_m}{\omega_{mn}^2}u_1(\alpha_m)u_2(\beta_n)O_{mn}^k e^{-\frac{\bar{T}}{\bar{S}}\omega_{mn}^2 t_1}\tag{30}$$

对于任何小于这个域里面的元素还都是非零的。这一项依赖观测时间和它还抵消了来源于式(23)或式(24)式中第一个积分的其他项(前面是正号的项),因此,式(23)或式(24)最后一项中的负数项将导致即使没有抽水或者注水和水头变成稳定状态时,灵敏度是依赖时间的这样一个不符合实际的情形[14]。

2.2.2　水头关于贮水系数的灵敏度

从式(25)可以得到

$$z^{(k,l)}(X)=\bar{S}\int_0^{t_1}\int_\Omega\frac{\partial\bar{h}}{\partial t}\varphi^*(\chi,t)\,\mathrm{d}\chi\mathrm{d}t.\tag{31}$$

把 $\bar{h}$ 和 φ^* 代入这个方程得到

$$z^{(k,l)}(X)=-\frac{16}{D^2\bar{T}}\sum_{\substack{m,m_1=1\\n,n_1=0}}^{\infty}a_n a_{n_1}F_1^-(\alpha_m,\alpha_{m_1})F_2^+(\beta_n,\beta_{n_1})\,O_{m_1n_1}^k\sum_{i=1}^{n_w}p_{mn}^{(i)}l_s^{(i)}\tag{32}$$

由于元素的大小趋于零,即 $\Omega_e(X)\to X$, 式(32)变为

$$z^{(k,l)}(X)=-\frac{16}{D^2\bar{T}}\sum_{\substack{m,m_1=1\\n,n_1=0}}^{\infty}a_n a_{n_1}S_C O_{m_1n_1}^k\sum_{i=1}^{n_w}p_{mn}^{(i)}l_s^{(i)},\tag{33}$$

其中,$S_C=\sin(\alpha_m x_1)\sin(\alpha_{m_1}x_1)\cos(\beta_n x_2)\cos(\beta_{n_1}x_2)$,需要注意的是这个灵敏度和初始水流域是独立的。

2.3　相关区域的灵敏度

2.3.1　水头函数关于渗透系数的灵敏度

对于一个相关渗透系数域[15],首先需要推导 $Y(\chi)$ 和 $Y(X)$ 之间的关系,考虑到 $Y(\chi)$ 均值域的条件,使用简单的克里格法表示可得

$$Y(\chi)=Y(\chi)+\frac{C_Y(X,\chi)}{C_Y(X,X)}[Y(X)-Y(X)]\tag{34}$$

其中 $C_Y(X,\chi)$ 导水系数在地点 $X=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ 是协方差函数,$\chi=(\chi_1,\chi_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $Y(\chi)$ 是绝对的均值域,绝对的均值域对于统计学上来说是一个常数。假如协方差函数被写为 $C_Y(X,\chi)=\sigma_Y^2\rho_Y(|X-\chi|)$,$\rho_Y$ 是一个相关函数。从式(33)可得

$$\frac{\partial Y(\chi)}{\partial Y(X)}=\frac{C_Y(X,\chi)}{C_Y(X,X)}=\rho_Y(|X-\chi|)\tag{35}$$

对于一个可分离指数的相关函数 $\rho_Y(X,\chi)=\sigma_Y^2\exp(-|X_1-\chi_1|/\lambda_{Y,1}-|X_2-\chi_2|/\lambda_{Y,2})$,其中 $\lambda_{Y,1}$ 和 $\lambda_{Y,2}$ 分别是 Y 在 x_1 和 x_2 方向上的相关长度,然后分别代入式(26)得

$$y^{(k,l)}(X)=\bar{T}\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{-\frac{|X_1-\chi_1|}{\lambda_{Y,1}}-\frac{|X_2-\chi_2|}{\lambda_{Y,2}}}\nabla\varphi^*(\chi,t)\cdot\nabla\bar{h}(\chi,t)\,\mathrm{d}\chi\mathrm{d}t.\tag{36}$$

2.3.2　水头函数关于贮水系数的灵敏度

类似地[16],可以写出关系式 $\partial Z(\chi)/\partial Z(X)=\rho_Z(X,\chi)$。通过式(25)可以得到

$$Z^{(k,l)}(X)=\bar{S}\int_0^{t_1}\int_\Omega e^{-\frac{|X_1-\chi_1|}{\lambda_{Y,1}}-\frac{|X_2-\chi_2|}{\lambda_{Y,2}}}\frac{\partial\bar{h}(\chi,t)}{\partial t}\varphi^*(\chi,t)\,\mathrm{d}\chi\mathrm{d}t.\tag{37}$$

把表达式 h^* 和 φ^* 代入这个方程再进行积分,还应该注意的是协方差函数 C_Y 没有限制的类型,利用可分离指数协方差可以让去推导这些灵敏度的分析过程。

3　结束语

研究一种新颖的灵敏度分析方法,即在抽水条件下的随机不均匀含水层非稳定态地下水的情况下,根据在自相关或者不相关有限空间上利用伴随法计算水头函数关于分布式渗透系数和贮水系数的灵敏度。这种方法论是基于伴随法,它适用于一个有界含水层中一系列井抽水(它们当中的每一个井有一个或者更多恒定速率的抽水周期)的非稳定流。这个课题研究和以前所有基于伴随的水头灵敏度研究最主要的区别是考虑了参数域空间的相关性,在之前研究的参数域都是被假设为不相关的并且在整个问题区域上积分化简来得到需要的灵敏度,用伴随法求参数灵敏度的特点就是可以获得数值。这种分析方法不仅仅局限于地下水的应用方面,还可以扩展到其他类似的控制方程和类似概念条件的数学问题中。

参考文献:

[1]　张蔚榛. 地下水非稳定流计算和地下水资源评估[M]. 武汉:武汉大学出版社,2013.

[2]　Butler J, W Liu. Pumping tests in non-uniform aquifers: The radially asymmetric case[J]. Water Resources,1993,29(2):259-269.

[3] Butler J, W Z Liu. Pumping tests in non-uniform aquifers the linear strip case[J]. Hydraul, 1991, 128(1):69-99.

[4] Carrera J, A Medina. An improved form of adjoint state equations for transient problems, in X International Conference on Computational Methods [J]. Water Resources, 1994, 14(3):451-459.

[5] Zhu Yeh. Characterization of aquifer heterogeneity using transient hydraulic tomography [J]. Water Resources, 2010, 11(3), 41.

[6] Yeh. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: The inverse problems [J], Water Resources, 1986, 22(2):95-108.

[7] Sykes, Wilson, Andrews. Sensitivity analysis for steady state groundwater flow using adjoint operators [J]. Water Resources. , 1985 , 21(3):359-371.

[8] Sun Yeh. A temporal sampling strategy for hydraulic tomography analysis [J]. Water Resources, 2013, 49:3881-3896.

[9] Sun, Yeh. A stochastic inverse solution for transient groundwater flow: Parameter identification and reliability analysis[J]. Water Resources, 1992, 28(12):3269-3280.

[10] Sun Yeh. Identification of parameter structure in groundwater inverse problems [J]. Water Resources, 1985, 21(6):869-883.

[11] Piasecki, Katopodes. Control of contaminant releases in rivers adjoint sensitivity analysis [J]. Hydraul, 1997, 123(6):486-492.

[12] Mazzilli, Guinot, H Jourde. Sensitivity analysis of two-dimensional steady-state aquifer flow equations. Implications for groundwater flow model calibration and validation[J]. Water Resources, 2010, 33(8):905-922.

[13] Mao, Yeh, Wan. Cross-correlation analysis and information content of observed heads during pumping in unconfined aquifers[J]. Water Resources, 2013, 49:713-731.

[14] Mao, Yeh, Joint interpretation of sequential pumping tests in unconfined aquifers[J]. Water Resources, 2013, 49:1782-1796.

[15] Leven C, P Dietrich. What information can we get from pumping tests-comparing pumping test configurations using sensitivity Coefficients [J]. Hydraul, 2006, 319(1):199-215.

[16] Kabala. Sensitivity analysis of a pumping test on a well with wellbore storage and skin[J]. Water Resources, 2001, 24(5):483-504.

Analytical Sensitivity Analysis of Transient Groundwater Flow

WU Yong[1,2], DU Juan[3], WENG Yun-hua[3]

(1. College of Environment and Civil Engineering, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China; 2. State Key Labortory of Geohazard Prevention and Geoenvironment Protection (The Center of Research and Development of Groundwater Science), Chengdu 610059, China; 3. Department of applied mathematics, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: Analytical sensitivity analysis of transient groundwater flow, Firstly, established a two-dimensional heterogeneous porous media saturated condition problem of unsteady groundwater flow model, Using the adjoint method to calculate state variable head about model parameters (hydraulic conductivity and storage coefficient) of sensitivity analysis methodology, Along with the method of the initial value from the steady state flow equation first, Reuse of unsteady flow boundary and initial conditions to solve the head and state variables and , Finally, the system sensitivity can be estimated. These analytical solutions can be more effective to calculate sensitivity, it will be useful to based on analysis and comparison of the model, the analysis method is not only confined to the groundwater applications, can also be extended to other similar control equations and the conditions of similar concepts of math problems.

Keywords: groundwaterflow; analytical sensitivity analysis; transient flow; optimization