第 32 卷第 3 期
2017 年 6 月

Vol. 32 No. 3
Jun. 2017

文章编号: 2096-1618(2017)03-0341-02

关于 Pell 方程 $x^2-Dy^2=-1$ 的一个注记

廖群英， 张 嵩， 何青云， 曾杰宁
(四川师范大学数学与软件科学学院,四川 成都 610066)

摘要:设 $p_i\equiv 5(\bmod 8)$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 为不同的奇质数,$D=2p_1\cdots p_s$. 利用方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解的性质,文献[1]给出 $s>2$ 时,Pell 方程 $x^2-Dy^2=-1$ 的有解判别条件. 为进一步研究该问题,利用初等的方法和技巧,完善了上述结果:即给出 $s=1,2$ 时,方程 $x^2-Dy^2=-1$ 的有解判别.

关 键 词:Pell 方程;基本解;Legendre 符号
中图分类号:O156.4　　**文献标志码**:A
doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2017.03.017

0 引言

设 D 为整数且不含平方因子,N 为非零整数. 熟知,Pell 方程 $x^2-Dy^2=N$ 是一类基础且重要的 Diophantine 方程,其正整数解与实二次域的基本单位及其他代数数论理论密切相关[2-5]. 利用方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解的性质,文献[1]给出方程:

$$x^2-Dy^2=-1 \tag{1}$$

有整数解的一些充分条件.

熟知,当 D 的分解中含有形如 $4k+3$ 的奇质因数或者 $D\equiv 0(\bmod 4)$ 时,方程(1)没有整数解[6-8];当 D 是形如 $4k+1$ 的奇质数时,方程(1)必有整数解[9];当 $p_i\equiv 1(\bmod 4)$ $(1\le i\le s)$ 是不同的奇质数,$D=p_1,\cdots,p_s$,且 $s=2$ 或者 $s>2$ 为奇数且 Legendre 符合 $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=-1$ $(1\le i\ne j\le s)$ 时,方程(1)必有整数解[1]. 进而,文献[1]还证明了:

命题 1[1]　设 $s>2$,$p_i\equiv 5(\bmod 8)$ $(1\le i\le s)$ 是不同的奇质数,$D=2p_1\cdots p_s$,且 Legendre 符号 $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=1$ $(1\le i\ne j\le s)$,则方程(1)必有整数解.

为进一步研究该问题,利用初等的方法和技巧,完善上述命题,给出 $s=1,2$,时方程 $x^2-Dy^2=-1$ 的有解判别,即证明了:

定理 2　设 $s\in\{1,2\}$,$p_i\equiv 5(\bmod 8)$ $(1\le i\le s)$ 是不同的奇质数,$D=2p_1\cdots p_s$,且 Legendre 符号 $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=1$ $(1\le i\ne j\le s)$,则方程(1)必有整数解.

1 主要结果的证明

设 $x_1+y_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解,则:

$$x_1^2-Dy_1^2=1 \tag{2}$$

易知,此时必有 x_1,y_1 不同奇偶且 $gcd(x_1,y_1)=1$.

若 x_1 为偶数,y_1 为奇数,则由式(2)两边取模4 可得 $D\equiv 3(\bmod 4)$. 另一方面,由题设条件可知 $D\equiv 2(\bmod 4)$,故矛盾.

因此必有 x_1 为奇数,且 y_1 为偶数. 注意到 $D\equiv 2(\bmod 4)$,因此方程(2)等价于

$$D\left(\frac{y_1}{2}\right)^2=\frac{Dy_1^2}{4}=\frac{x_1^2-1}{4}=\left(\frac{x_1+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x_1-1}{2}\right)$$

并且 $gcd\left(\frac{x_1+1}{2},\frac{x_1-1}{2}\right)=1$. 因此

$$\frac{X_1+1}{2}=D_1u^2,\ \frac{x_1-1}{2}=D_2v^2,\ y_1=2uv$$

其中 $D_1,D_2,u,v\in\mathbb{Z}^+$,$D=D_1D_2$ 且 $gcd(u,v)=1$. 从而

$$D_1u^2-D_2v^2=1 \tag{3}$$

因此,欲使方程(1)有整数解,只需证明 $D_1=D,D_2=1$. 事实上,由 $s=1$ 或 2 可知有如下两种情形:

(1)当 $s=1$ 时,即 $D=2p$,此时由 $D_1,D_2\in\mathbb{Z}^+$,$D=D_1D_2$ 可知有如下几种情形:

(i)若 $D_1=2,D_2=p$,此时由式(3)可知 $2u^2-pv^2=1$,两边取模 p 可得 2 为模 p 的平方剩余,因此 $p\equiv\pm 1(\bmod 8)$,此与题设条件 $p\equiv 5(\bmod 8)$ 相矛盾.

(ii)若 $D_1=p,D_2=2$,此时由式(3)可知 $pu^2-2v^2=1$,两边取模 p 可得-2 为模 p 的平方剩余. 但由题设条件 $p\equiv 5(\bmod 8)$ 可知:

$$\left(\frac{-2}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)=-1$$

即-2 为模 p 的平方非剩余,故矛盾,其中 $\left(\frac{-}{p}\right)$ 为模奇质数 p 的 Legendre 符号.

(iii)若 $D_1=1,D_2=2p$,此时由式(3)可知 $u^2-2pv^2=1$,即 $u^2-Dv^2=1$,从而 $u+v\sqrt{D}$ 为 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的一个整数解. 注意到 $v=\frac{y_1}{2u}<y_1$,此互 $x_1+y_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解的假设相矛盾.

收稿日期:2017-03-27
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11401408);四川省科技厅科研重点资助项目(2016JY0134)

综上,必有 $D_1=2p=D$,$D_2=1$,从而方程(1)有整数解.

(2)当 $s=2$ 时,即 $D=2p_1p_2$,此时由 $D_1, D_2\in\mathbb{Z}^+$,$D=D_1D_2$ 知有如下几种情形:

(i) 若 $D_1=1$,$D_2=2p_1p_2$,此时由式(3)可知 $u^2-Dv^2=1$,从而 $u+v\sqrt{D}$ 为 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的一个整数解. 注意到 $v=\frac{y_1}{2u}<y_1$,此与 $x_1+y_1\sqrt{D}$ 是 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解的假设相矛盾.

(ii)若 $D_1=2$,$D_2=p_1p_2$,此时由式(3)可知 $2u^2-p_1p_2v^2=1$,两边取模 p_1 可知 2 为模 p_1 的平方剩余,从而 $p_1\equiv\pm1\pmod 8$,与题设条件 $p_i\equiv5\pmod 8$ 相矛盾.

(iii) 若 $D_1=p_1p_2$,$D_2=2$,此时由式(3)可知 $p_1p_2u^2-2v^2=1$,两边取模 p_1 可知-2 为模 p_1 的平方剩余,仍与题设条件 $p_i\equiv5\pmod 8$ 相矛盾.

(iv) 若 $D_1=2p_i$,$D_2=p_j(i\neq j)$,此时由式(3)可知 $2p_iu^2-p_jv^2=1$,两边取模 p_j 可知 $\left(\frac{2p_i}{p_j}\right)=1$. 从而由题设 $\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=1(1\le i\neq j\le s)$,可知 $\left(\frac{2}{p_j}\right)=1$,故 $p_j\equiv\pm1\pmod 8$,此与题设 $p_i\equiv5\pmod 8$ 相矛盾.

(v) 若 $D_1=p_i$,$D_2=2p_j(i\neq j)$,此时由式(3)可知 $p_iu^2-2p_jv^2=1$,两边取模 p_i 可知 $\left(\frac{-2p_j}{p_i}\right)=1$. 从而由题设 $\left(\frac{p_j}{p_i}\right)=1(1\le i\neq j\le s)$,可知 $\left(\frac{-2}{p_i}\right)=1$,故 $p_i\equiv1,3\pmod 8$,此与题设 $p_i\equiv5\pmod 8$ 相矛盾.

综上,必有 $D_1=D$,$D_2=1$,从而方程(1)有整数解.

这就完成了定理 2 的证明.

2 小结

利用初等方法和技巧,完善了命题 1 的结果.

对于文献[1]中的另外一种情形,即当 $p_i\equiv1\pmod 4$ $(1\le i\le s)$ 是不同的奇质数,$D=p_1\cdots p_s$,且 $s>2$ 为偶数时,方程(1)何时必有整数解的问题,没有给出判别条件.

事实上,如果沿用文中的思想,当 $D_1>1$,$D_2>1$ 时,对式(3)的两边取模 D_1 中的质因数,则必有-1 是模 D_1 中的任意一个奇质因数的平方剩余,即要求任意的奇质因数 $p_i\equiv1\pmod 4$,此时由 Legendre 符号的二次反转律可知

$$\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=\left(\frac{p_j}{p_i}\right)\quad(1\le i\neq j\le s)$$

故当 $D_1=p_i$,$D_2=D/p_i$ 时,代入式(3),两边取模 $p_j(j\neq i)$ 可知对任意的 $j\neq i$,$\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=1$,此时再对式(3)的两边取模 p_i,则有 $\left(\frac{-1}{p_i}\right)=1$,从而 $p_i\equiv3\pmod 4$,矛盾. 从而这些情况都可以排除.

但是对于 $D_1>1$ 且含有偶数个 p_i 的情形,注意 $s>2$ 为偶数,故 D_2 中也含有偶数个 p_i. 此时无论 p_i 对 p_j 的 Legendre 符号是 1 还是-1,D_1 对于 D_2 中的每一个奇质因数的 Legendre 符号均为 1,没有办法得到矛盾.

因此,当 D 是偶数(≥4)个不同奇质数的乘积时,利用本文的方法不能给出方程(1)有整数解的充分条件,需要寻求新的方法和工具.

参考文献:

[1] 曹珍富. 不定方程及其应用[M]. 上海:上海交通大学出版社,2000.

[2] Flath D E. Introduction to Number Theory[M]. New York:Wiley,1989.

[3] Guy R K. Unsolved Problem in Number Theory [M]. New York:SpringerVerlag,2004:4-10.

[4] Epstein P. Zur auflosbarkeit der gleichung $x^2-Dy^2=1$[J]. J Reine angew Math,1934,171:243-252.

[5] Grytczuk A, Luca F, Wojtowica M. The negative Pell equation and Pythagorean triples[J]. Proc Japan Acad,2000,76(1):91-94.

[6] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社,1979:358-361.

[7] GUY R K. Unsolved problems in number theory [M]. Beijing:Beijing Science Press,2007:71-158.

[8] 曹珍富. 丢翻图方程引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1986:149-164.

[9] 何国梁. 初等数论[M]. 海南:海南出版社,1992.

A Note on the Pell Equation $x^2-Dy^2=-1$

LIAO Qun-ying, ZHANG Song, HE Qing-yun, ZENG Jie-ning

(Institute of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: Let $p_i\equiv5\pmod 8$ $(i=1,2,\cdots,s)$ be distinct primes and $D=2p_1\cdots,p_s$. Based on properties for the elementary solutions of the Pell equation $x^2-Dy^2=1$, in [1], some criterions for the solvability of the Pell equation $x^2-Dy^2=-1$ are obtained when $s>2$. Based on elementary methods and techniques, the present paper continues the study and improves the results, namely, obtains a criterions for the solvability of the Pell equation $x^2-Dy^2=-1$ when $s=1,2$.

Keywords: Pell equation; elementary solution; Legendre symbol