

文章编号: 2096-1618(2017)05-0492-06

# 一个新的三维混沌系统及其线性反馈同步

何启泠, 薛帅宁, 邓洋洋, 徐庆, 王海江  
(成都信息工程大学电子工程学院, 四川 成都 610225)

**摘要:**提出了一个含立方项的新三维连续自治混沌系统,该系统包含3个参数。其中前两个方程各含有一个非线性乘积项,第三个方程包含一个立方项。对新混沌系统的平衡点稳定性、功率谱、Lyapunov 指数与维数、Poincare 截面等的基本动力学特性进行分析,理论上证明了系统的混沌特性。最后进行混沌系统的线性反馈同步控制,得到控制参数的选取对同步时间的影响。因为系统的理论分析和数值仿真一致,从而证明了该系统产生混沌的能力,为进一步研究混沌系统在保密通信和信息处理等领域的应用与优化提供了理论基础。

**关键词:**混沌系统;Lyapunov 指数;Poincare 截面图;线性反馈同步控制;混沌同步

**中图分类号:**TP13

**文献标志码:**A

**doi:**10.16836/j.cnki.jcuit.2017.05.005

## 0 引言

随着1963年Lorenz<sup>[1]</sup>发现了第一个混沌系统,混沌系统理论研究和实践得到了迅猛发展。现代科技的不断进步对混沌系统的认知也越来越清晰。由于混沌信号的拟噪声与难预测的特性可以在传输信息的过程中提供比较好的保密性,能很好地运用在保密通信中,并且它的宽屏特性能实现某种意义上的扩频,因此对混沌系统进行更深入的研究。在Lorenz系统之后,又提出了Chen系统<sup>[2]</sup>、Lü系统<sup>[3]</sup>、Chua系统<sup>[4]</sup>、Qi系统<sup>[5]</sup>等数学模型。这些数学模型的提出方便对混沌系统的研究和应用。从20世纪80年代中期,混沌理论迅速吸引了数学、物理、工程、经济学、气象学等诸多领域学者的关注,引发了全球混沌热。混沌系统的提出广泛应用在图像数据加密、信号处理和通信等领域。混沌同步<sup>[6]</sup>是对于从不同初始条件出发的混沌系统,随着时间的不断推移,它们的轨线逐渐趋于一致。混沌同步在工程上具有巨大的研究价值和应用前景。随着混沌系统同步的研究,其应用也越来越深入,尤其是在保密通信中,混沌的同步可以大大提高系统的保密性<sup>[7]</sup>。由于混沌系统对初始值特别敏感,并且初始条件的精度会受到很多限制,因此混沌的同步需要同步时间,参数的选取会对这个时间产生影响。

文中提出了一个含立方项的新三维自治混沌系统,分析该系统的基本动力学证明了该系统为混沌系统<sup>[8-9]</sup>,并基于混沌系统的Lyapunov指数,采用线性反馈控制方法<sup>[10-11]</sup>确定控制参数的取值条件,实现了该三维自治混沌系统的同步控制。该系统产生混沌能力

强,可以很好地运用在图像加密与解密、混沌的保密通信和信息处理等领域。

## 1 新三维混沌系统数学模型及基本动力学

### 1.1 新的混沌系统模型及其吸引子

提出了一个新混沌系统,该系统有3个方程,并且其中一个方程含有立方项的,其数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + yz, \\ \dot{y} = by - xz + z, \\ \dot{z} = -cz + y^3. \end{cases} \quad (1)$$

式中,参数 $a, b, c$ 为实常数,选取初始值为 $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.1, 0.1)$ 。当 $a=3, b=5, c=10$ 时系统存在一个典型混沌吸引子,如图1所示。

### 1.2 耗散性和对称性与时域波形图和功率谱图分析

根据根据方程组(1),有:

$$\nabla V = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = -a + b - c = -8 < 0 \quad (2)$$

由耗散理论分析该系统可知,由于该系统的散度 $\nabla V$ 为负数,因此该系统是耗散的,并以

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a+c-b)t} \quad (3)$$

的形式收敛。由此可以发现初始体积元 $V_0$ 在时间为 $t$ 得到 $V_0 e^{-(a+c-b)t}$ ,由此体积元可以判断该系统当时间 $t \rightarrow \infty$ 时,包含的系统轨线的每个体积元均以 $e^{-(a+c-b)t}$ 的速率最终趋于零,最终可以得到一个由该系统的所有轨线组成的集合,该集合中所有的体积皆为零,由此可知该系统存在吸引子。

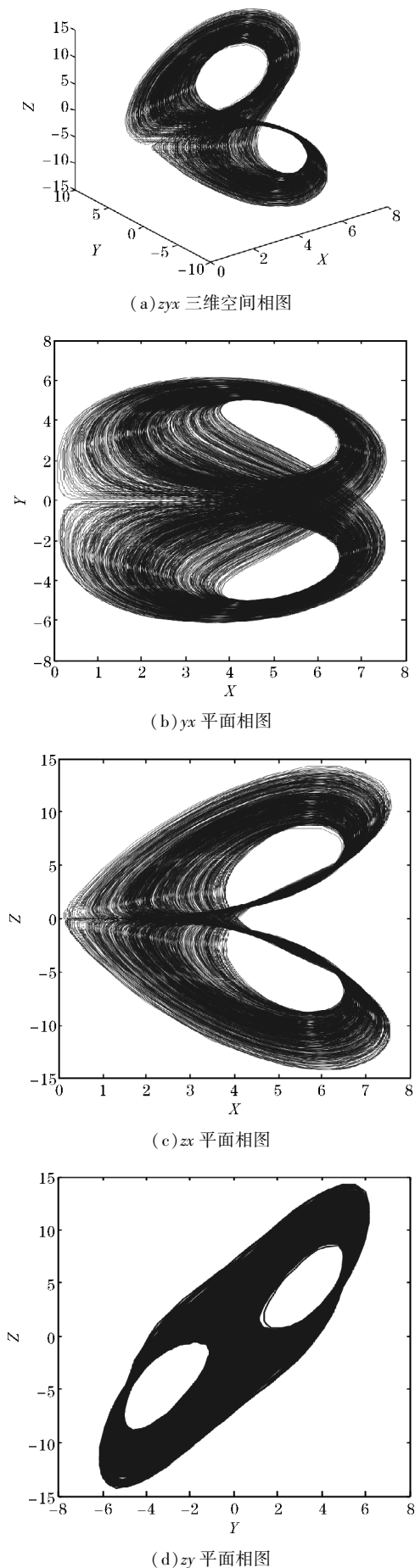


图 1 取  $a=3, b=5, c=10$  的混沌吸引子

由该系统的系统方程可以发现其具有自然的对称性,即做  $(x,y,z) \rightarrow (x,-y,-z)$  变换后,系统将保持不变。变化可表示为

$$P:R^3 \rightarrow R^3, X \rightarrow PX, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

该变化满足  $f(PX) = Pf(X)$ , 即在  $x$  轴的反射下,系统将不受影响,并且对称性不会改变系统所有的参数。

对该系统采用 matlab 仿真得到时域波形,如图 2(a)所示,由此图可发现在不带随机因素的非线性确定性系统中出现的随机现象,此为混沌运动的现象。此外,该系统的功率谱是连续谱,如图 2(b)所示。图中没有明显的波峰,且序列的频谱很宽,从混沌系统的要点可以得出该系统满足混沌系统条件。

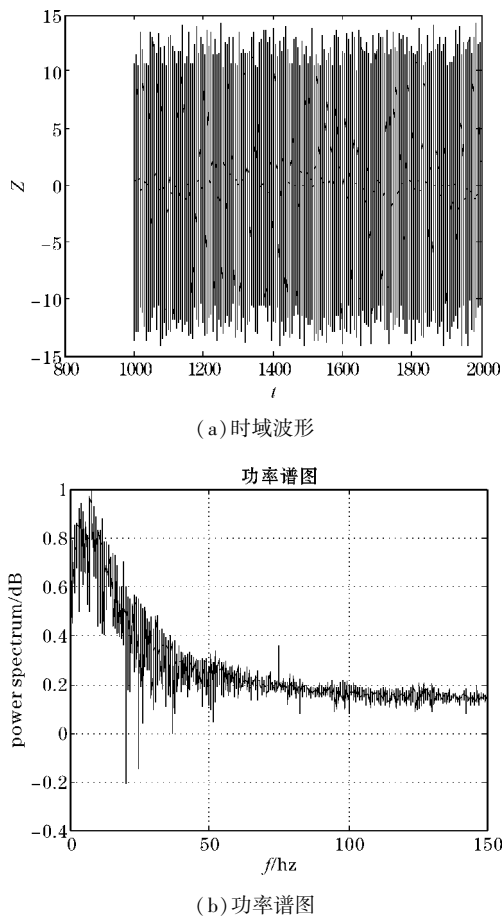


图 2 该混沌系统的时域波形与功率谱图

1.3 平衡点稳定性分析

由  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 0$  可求解该系统从而计算得出平衡点为

$$S_0 = (0,0,0), S_1 = (5.0587, 3.5099, 4.3239), S_2 = (5.0587, -3.5099, -4.3239),$$

$S_3 = (-1.5294 + 3.7596i, -1.5612 + 2.9321i, 3.6461 - 0.3767i),$

$S_4 = (-1.5294 - 3.7596i, -1.5612 - 2.9321i, 3.6461 + 0.3767i),$

$S_5 = (-1.5294 + 3.7596i, 1.5612 - 2.9321i, -3.6461 + 0.3767i),$

对平衡点  $S = (X^*, Y^*, Z^*)$ , 将该系统在合平衡点处线性化后,可得出 Jacobi 矩阵  $J$ ,如式(5)所示。

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{bmatrix}_{\begin{matrix} x=X^* \\ y=Y^* \\ z=Z^* \end{matrix}} = \begin{bmatrix} -a & Z^* & Y^* \\ -Z^* & b & -X^* + 1 \\ 0 & 3(Y^*)^2 & -c \end{bmatrix}$$

(5)

根据  $\det [\lambda I - J(0)] = 0$ ,可以得到对应该系统在平衡点  $S_0, S_1, S_2$  的 Jacobi 矩阵的特征值如表 1 所示。

表 1 平衡点处的 Jacobi 矩阵特征值

$S_0$	$S_1$	$S_2$
3	-7.881	-7.881
-5	-0.059 + 11.48i	-0.059 + 11.48i
10	-0.059 - 11.48i	-0.059 - 11.48i

由上述的推论可知,该系统有一个不稳定的指标 2 的鞍点和两个鞍焦平衡点,因此理论上可以证明该系统可能存在混沌特性。

1.4 Lyapunov 指数谱、维数和 Poincare 截面分析

得到的 Lyapunov 指数谱如图 3 所示。这里采用的是 Jacobi 矩阵的方法计算出 3 个 Lyapunov 指数分别为:  $LE1=0.03, LE2=-0.01, LE3=-7.78$ ,可以从中得出:该系统的 3 个 Lyapunov 指数一个指数为正,一个指数趋于 0,另一个指数为负,并且它们满足  $L1 < L3$ 。该 Lyapunov 指数的特性可以知道该系统的运动轨迹为混沌运动,且为奇怪吸引子。该系统的 Lyapunov 维数为:

$$D_l = k + \frac{S_k}{|L_k|} = 2 + \frac{(L_1 + L_2)}{|L_3|} = 2.026$$

(6)

在选取该系统参数  $a=3, b=5, c=10$  时,由上述计算出的 LE 指数可知该系统有一个为正 LE 指数,由此说明了此时该系统的状态是混沌的,图 4 为选取不同截面时的庞加莱截面。由图 4 的庞加莱截面图可以发

现,该系统的庞加莱截面上有一些密集点,该密集点成片分布,并且具有分型结构,还可以清楚地发现其吸引子的叶片,根据这些点的分布可以知道该系统在这种状态下进行混沌运动。

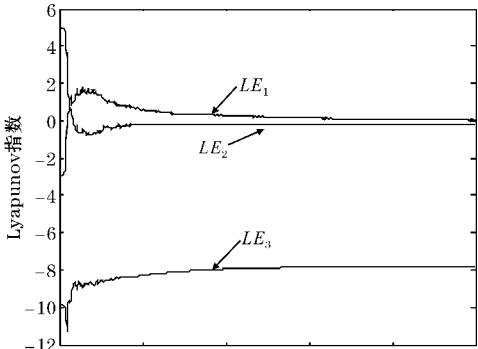
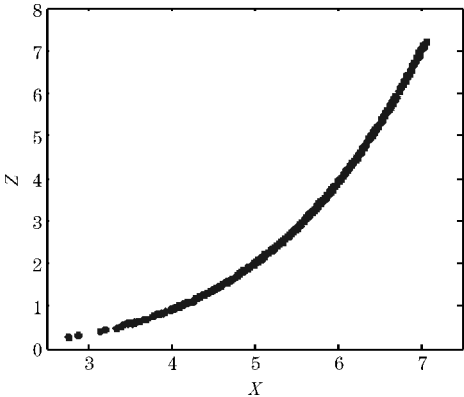
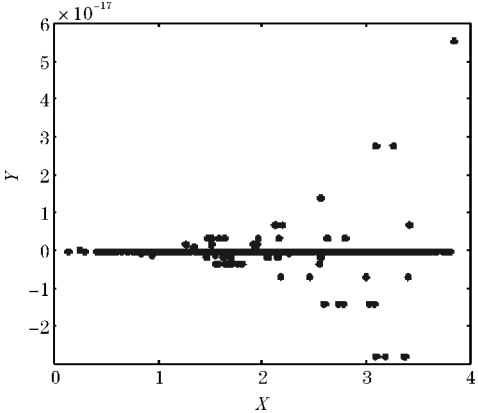


图 3 Lyapunov 指数



(a)  $y=0$  时系统的庞加莱截面



(b)  $z=32$  时系统的庞加莱截面

图 4 该系统的庞加莱截面

由此可见,该混沌系统具有复杂的分形结构并且其 Lyapunov 是分数维,并且根据对庞加莱截面图点的分布状态可以观察其进行混沌运动,从而可以说明该系统是一个混沌系统。

2 线性反馈同步控制机理

以混沌系统:  $\dot{x} = f(x)$  为模型,采用线性反馈控制

后可得到受控系统的方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1), \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + k(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (7)$$

令  $x = x_1 - x_2$ , 可将式(7)写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F(x_1), \\ \dot{x}_2 = F(x, x_1, k), \end{cases} \quad (8)$$

式中  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ ,  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})^T$ ,  $x_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})^T$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  为  $n$  维状态向量,  $k = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_n]^T$  为线性反馈控制参数。

利用式(8),可确定控制参数的取值范围,使其式中第二个式子渐进稳定于零的平衡点,使其混沌同步。

定义  $D(x_1) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_{1i}}$  为  $\dot{x} = f(x)$  的向量场散度,

根据向量场散度和 Lyapunov 指数的关系,从而得到:

$$D(x_1) = D(x_2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_1) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_2) \quad (9)$$

式(9)中  $\lambda_i(x_1), \lambda_i(x_2)$  表示  $\dot{x} = f(x)$  在  $x_1, x_2$  处的 Lyapunov 指数。

对于式(7)有

$$D = D(x_1) + D(x_2) - \sum_{i=1}^n k_i \quad (10)$$

对于式(8)有

$$D = D(x_1) + D(x) \quad (11)$$

式(8)中  $D(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  为误差系统的向量场散度,  $\lambda_i(x)$  为误差系统的 Lyapunov 指数。由式(9)~(11)可得:

$$D(x) = D(x_1) - \sum_{i=1}^n k_i \quad (12)$$

为使混沌系统达到同步,则必须使其误差系统的最大 Lyapunov 指数小于零,则  $D(x) < 0$ , 即  $D(x_1) -$

$\sum_{i=1}^n k_i < 0$ 。令  $k = k_1 = \dots = k_n$ , 假设  $\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , 从而可知当控制参数取  $k > \lambda_{\max}$ , 采用线性反馈控制法可以使混沌系统达到同步。

### 3 该混沌系统的线性反馈同步控制与数值仿真

由该系统与式(7)可以得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + y_1 z_1, \\ \dot{y}_1 = by_1 - x_1 z_1 + z_1, \\ \dot{z}_1 = -cz_1 + y_1^3. \end{cases} \quad (13)$$

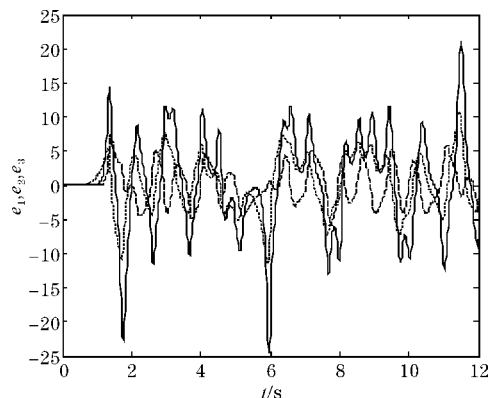
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -ax_2 + y_2 z_2 + k_1(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = by_2 - x_2 z_2 + z_2 + k_2(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_2 = -cz_2 + y_2^3 + k_3(z_1 - z_2). \end{cases} \quad (14)$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  为控制参数, 令  $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1$ , 则由式(14)减去式(13)可得误差动力学系统为

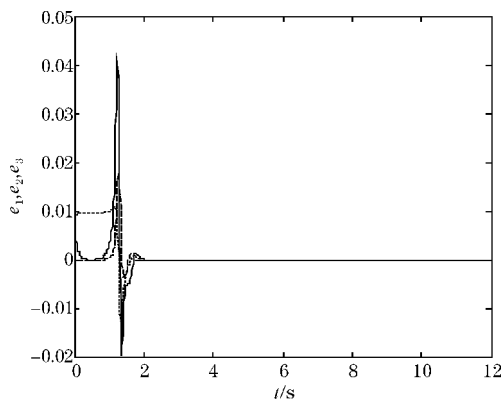
$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + y_2 z_2 - y_1 z_1 - k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = be_2 - x_2 z_2 + x_1 z_1 + e_3 - k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 = -ce_3 + y_2^3 - y_1^3 + k_3 e_3. \end{cases} \quad (15)$$

根据常规方法,由于该混沌系统有立方项的存在,很难构造出一种 Lyapunov 指数,因此无法确定控制参数的取值范围。但根据数值计算则比较容易计算得到该系统的最大 Lyapunov 指数,即  $\lambda_{\max} = 0.03$ 。令  $k = k_1 = k_2 = k_3$ , 当  $k > 0.03$  时可以实现该混沌系统的同步控制。

利用上述结论,进行 MATLAB 仿真,驱动系统的初始值设为  $x_1(0) = y_1(0) = z_1(0) = 0.01$  响应系统的初始值设为  $x_2(0) = y_2(0) = z_2(0) = 0.001$ , 系统总的误差为  $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ , 当选取不同的  $k$  值时,同步时间也相应变化,如图 5 所示,并且可以得到相应的状态变量相图,如图 6 所示。

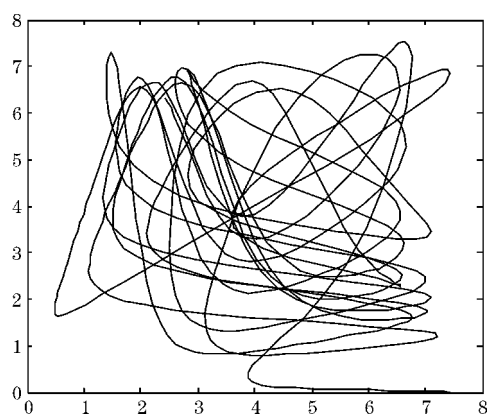
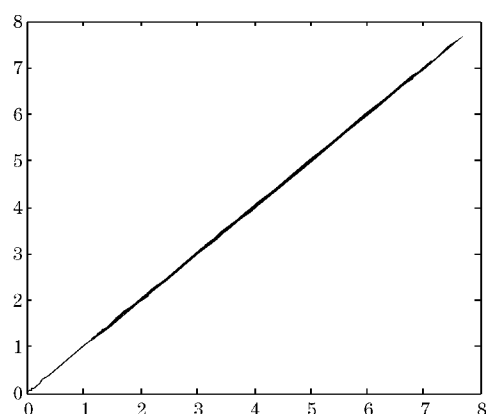


(a)  $k=0.02$



(b)  $k=5$

图5 参数  $k$  变化时相应的系统同步相图

(a)  $k=0.02$ (b)  $k=5$ 图6 参数 $k$ 变化时相应的状态变量相图

由图5证明上述结论的准确性,并从图中可知当控制参数 $k$ 取值越大,系统达到同步所需要的时间越短,且同步效果越好。

## 4 结束语

提出一个带立方项的新三维连续自治混沌系统,从理论到对庞加莱截面上点进行了一系列的分析论证:该系统具有自然的对称性,且收敛与一个混沌吸引子,从平衡点可以得出其有一个不稳定的指标2的鞍点和两个鞍焦平衡点,它的功率谱为连续的,其Lyapunov指数有一个为正数,并且其庞加莱截面上点的分布可以知道该系统在做混沌运动,从这些结论可以知道其为三维混沌系统。根据仿真结果验证了其混沌系统的有效性和可靠性,能很好地运用在保密通信中,在信息的传输中能达到很好保密的效果。推导论证了线性反馈控制的控制参数能影响同步时间,并利用基于线性反馈控制的方法,推导得到使混沌系统实现同步的条件:只要控制参数大于系统最大Lyapunov指数。最后的仿真结果能很好地反映这种现象,即当控

制参数远大于最大Lyapunov指数,从相应的相图可发现同步时间越短。该混沌系统的提出与验证,为进一步研究混沌系统在保密通信和信息处理等领域的应用与优化提供了理论基础。

## 参考文献:

- [1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow [J]. Journal of the atmospheric sciences, 1963, 20(2): 130-141.
- [2] Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor [J]. International Journal of Bifurcation and chaos, 1999, 9(7): 1465-1466.
- [3] Lü J, Chen G. A new chaotic attractor coined [J]. International Journal of Bifurcation and chaos, 2002, 12(3): 659-661.
- [4] Matsumoto T. A chaotic attractor from Chua's circuit [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1984, 31(12): 1055-1058.
- [5] Qi G, Chen G, van Wyk M A, et al. A four-wing-chaotic attractor generated from a new 3-D quadratic autonomous system [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 38(3): 705-721.
- [6] Pecora L M, Carroll T L. Driving systems with chaotic signals [J]. Physical Review A, 1991, 44(4): 2374.
- [7] 张小红, 王伟. 异维异构混沌系统同步及其在保密通信中的应用 [J]. 计算机科学, 2012, 39(4): 220-222.
- [8] 欧青立, 徐兰霞. 一个新的多涡卷混沌系统及其电路仿真 [J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(12): 187-190.
- [9] 周小勇. 一个新混沌系统及其电路仿真 [J]. 物理学报, 2012, 61(3): 30504-030504.
- [10] 徐瑞萍, 高存臣. 基于线性反馈控制的一类混沌系统的同步 [J]. 中国海洋大学学报(自然科学版), 2014, 5: 017.
- [11] 高智中. 一个新超混沌系统及其线性反馈同步 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2012, 51(6): 30-34.



## A New Chaotic System and its Linear Feedback Synchronization

HE Qi-ling, XUE Shuai-ning, DENG Yang-yang, XU Qing, WANG Hai-jiang

(College of Electronic Engineering, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

**Abstract:** This paper reports a new three-dimensional continuous autonomous system, the system contains three parameters. The first two equations contain a nonlinear product term, and the third equation contains a cubic term. In this paper, the balance point stability of the new chaotic system, the power spectrum, the Lyapunov exponent and the dimension, and the Poincare cross section are analyzed. Moreover, the chaotic characteristics of the system are proved theoretically. Finally, the linear feedback synchronization control of the chaotic system is carried out, and the influence of the selection of the control parameters on the synchronization time is obtained. Through the theory and a mass of system emulation, the system, the ability of the system to produce chaos is proved, which provides a basis for further research on the application and optimization of chaotic systems in secure communication and information processing.

**Keywords:** chaotic system; Lyapunov exponent; Poincare diagrams; linear feedback synchronization control; chaos synchronization