第 32 卷第 6 期
2017 年 12 月

成 都 信 息 工 程 大 学 学 报
JOURNAL OF CHENGDU UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGY

Vol. 32 No. 6
Dec. 2017

文章编号：2096-1618(2017)06-0605-04

一种基于双曲余弦型变步长 LMS 算法研究

孙 洋[1]， 陈光拓[1]， 杜雨洺[1,2]， 佘 勇[1,2]

(1. 成都信息工程大学电子工程学院，四川 成都 610225；2. 中国气象局大气探测重点实验室，四川 成都 610225)

摘要：变步长 LMS 算法较好的克服了固定步长 LMS 算法中收敛速度与稳态误差之间不可兼得的矛盾。变步长 LMS 算法中步长因子 μ 应该按照一定的要求变化，即在误差较大时取较大的 μ 值，误差较小时取较小的 μ 值，直到随着误差接近于零，μ 值也缓慢收敛于零值。建立了步长因子与误差信号之间的一种双曲余弦非线性函数模型，在此模型的基础上提出一种新的 LMS 算法，将该算法对比传统固定步长 LMS 算法和 Sigmoid 型变步长 LMS 算法仿真分析，仿真结果表明，新的 LMS 算法在不失精度和计算复杂度的情况下，算法性能较好。

关 键 词：步长因子；最小均方算法；收敛速度；稳态误差

中图分类号：TN911.4 **文献标志码**：A

doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2017.06.006

LMS 算法在雷达、移动通信、自适应信号处理等领域有非常重要的应用，其具有计算量小，易于实现等优点[1]。通常 LMS 算法以误差信号为自变量来调整步长因子，如果外界的干扰较大，会导致误差信号的起伏波动较大，难以保证误差信号趋近于零，在这种环境下，误差信号可能一直在零值上下波动[2]。若以前后时刻的相关误差值作为控制步长因子的自变量，既保证系统可以有效抑制外界干扰，又能得到较低的稳态误差值，极大地增加了 LMS 算法的抗干扰能力。

步长因子 μ 以前后时刻相关误差值为自变量按照双曲线函数的曲线轨迹变化，引导出一种新的双曲余弦型变步长 LMS 算法，MATLAB 仿真结果表明，该算法具有较快的收敛速度和较低的稳态误差。

1 LMS 算法理论

最小均方算法(least mean square，LMS)是 Widrow 和 Hoff[2] 提出的一种自适应更新权值系数的算法，该算法基于最小均方误差准则，在梯度法的基础上[3]，通过改进均方误差梯度估计值的一种方法，LMS 理论框架结构如图 1 所示。

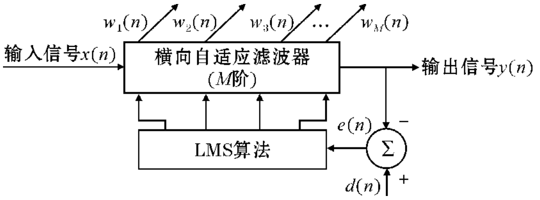

图 1 LMS 理论框架结构

当 M 个阵元信号，分别乘以对应的权值系数，并对各自的输出 $y_i(n)$ $(i=1,2,\cdots,M)$ 求和得到最终的理想输出信号 $y(n)$，LMS 算法的作用主要是不断更新权值系数减小输出与期望信号的误差，不断接近期望信号，达到自适应效果[4]。一般，LMS 算法可以按照式(1)执行完一次迭代过程初始化

$$\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{W}(0)=[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

当 $k \geq 0$ 时

$$\begin{aligned} y(n) &= \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{W}(n) \\ e(n) &= d(n)-y(n) \\ \boldsymbol{W}(n+1) &= \boldsymbol{W}(n)+2\mu e(n)\boldsymbol{X}(n) \end{aligned} \tag{2}$$

需要指出的是，式(1)不一定初始化为零，如果预先知道权值系数的取值区间，可采用非零值对权值系数作初始化，这样可以减少迭代次数和计算复杂度。文献[5]详细阐述了步长因子 μ 的取值范围，即为了保证权值系数在平均意义上收敛，LMS 算法的步长因子 μ 必须在如下范围内取值[6]

$$0<\mu<\frac{1}{\operatorname{tr}[R_{XX}]}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i}<\frac{1}{\lambda_{\max}} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{XX}$ 为输入信号的自相关矩阵，λ_i $(i=1,2,\cdots,N)$ 为输入信号自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{XX}$ 的特征值，$\lambda_{\max}$ 为最大特征值。

2 变步长 LMS 算法

2.1 Sigmoid 函数型变步长 LMS 算法

自从 Widrow 和 Hoff 在 1960 年提出 LMS 算法以来，基于该算法的大多数改进 LMS 算法都是围绕步长

收稿日期：2017-09-11
基金项目：国家自然科学基金资助项目(41475143)

因子展开的。其中经典的一种算法是,基于 Sigmoid 型函数来改变步长因子,文献[5]详细介绍了这种方法,该文献指出步长因子 $\mu(n)$ 与误差值 $e(n)$ 之间具有 Sigmoid 型的函数关系

$$\mu(n)=\beta\left(\frac{1}{1+\exp(-\alpha\,|e(n)|^{m})}-0.5\right) \tag{4}$$

其中 α、β 均为常量,$e(n)$ 为误差值。

文献[7]指出 Sigmoid 函数型变步长 LMS 算法的误差信号 $|e(n)|$ 较大时步长因子可以取到较大值,保证开始阶段能够达到较快的收敛速度,但是在误差 $|e(n)|$ 接近零处,$\mu(n)$ 曲线过于尖锐,不具有缓慢变化的特性,这将会引起稳态误差的剧烈波动。文献[7-9]将该算法称为 SVSLMS 算法。

2.2 双曲余弦型变步长 LMS 算法

一般在 LMS 算法中,误差信号 $e(n)$ 还会受到噪声和其他干扰信号的影响,特别是在 SINR 低的通信环境里,如果只用误差信号 $e(n)$ 对步长调整,会影响 LMS 算法的性能[8]。具体指的是,当噪声和干扰源一直存在时,误差信号的波动范围变大,这种波动会得到带有偏差的步长因子值,难以取得最优的权值系数。

考虑利用当前误差 $e(n)$ 与上一步误差 $e(n-1)$ 的自相关估计来控制步长的变化,称此自相关估计为误差信号的相关值。引入误差信号的相关值,能够减小和抑制输入端不相关的干扰和噪声对误差 $e(n)$ 造成的波动,有效地提高算法的鲁棒性。预计在一定范围 SINR 下,采用误差的相关值,能够达到更小的稳态失调噪声,可以减小稳态误差的波动范围。

结合函数基本平移性质,对双曲余弦函数做出简单变换,引导出一种新变步长因子 LMS 算法,得到步长因子表达式:

$$\mu=\beta\cosh(|e(n)e(n-1)|^{\alpha})-1 \tag{5}$$

式中 α、β 为常量,$e(n)$ 为误差值。

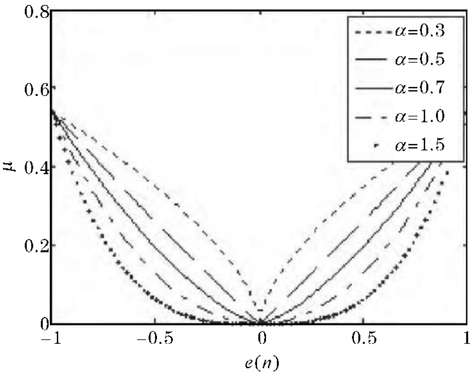

图2 β 固定 α 变化时 μ 与 $e(n)$ 的函数曲线

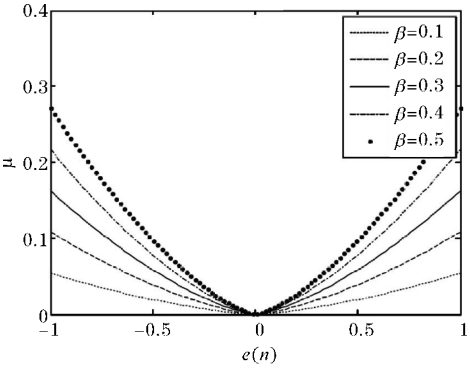

图3 α 固定 β 变化时 μ 与 $e(n)$ 的函数曲线

图2、图3分别为误差信号 $e(n)$ 在[−1,1],当 β 不变时,随着 α 的改变,函数曲线的变化情况;当 α 不变时,随着 β 的改变,函数曲线的变化情况。如图2所示,只要把 α 控制在0.5以上步长因子就可以缓慢收敛于零。如图3所示,取 $0\leqslant\beta\leqslant0.5$,可以较好保证算法稳定。在实际仿真中,输入信号的统计特性不同,μ 的幅值因子 β 需要选取不同的常数值,保证 μ 的取值在 $(0,1/\lambda_{\max})$ 变化。

3 仿真分析

在 MATLAB 中可以很容易对自相关矩阵 $\boldsymbol{R}_{XX}$ 特征分解并求得该矩阵的迹 $\mathrm{tr}[\boldsymbol{R}_{XX}]$,满足式(2)可得到步长因子 μ 的取值范围,从而选取正确的步长 μ 值。对固定步长 LMS 算法和 Sigmoid 函数型 LMS 算法及新提出的双曲余弦函数型变步长 LMS 算法作 MATLAB 模拟仿真,并且对3种 LMS 算法仿真结果对比分析。实验样本选取单个误差样本平方作为均方误差的估计值,采用 $M=10$ 个阵元天线,期望信号为正弦波 $s=5\sin(2\cdot\mathrm{pi}\cdot0.01\cdot n)$(其中 $n=1,2,\cdots,N,N=512$),干扰信号表达式为 $I(n)=0.5\mathrm{randn}(1,N)$(其中 $n=1,2,\cdots,N,N=512$),每个阵元的输入信号为 $x_n=s(n)+I(n)$,信噪比为 $SNR=40$ dB,得到双曲余弦函数型变步长 LMS 算法仿真结果如图4所示。

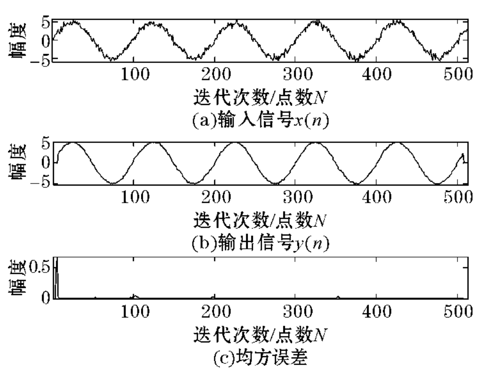

图4 双曲余弦型 LMS 算法仿真

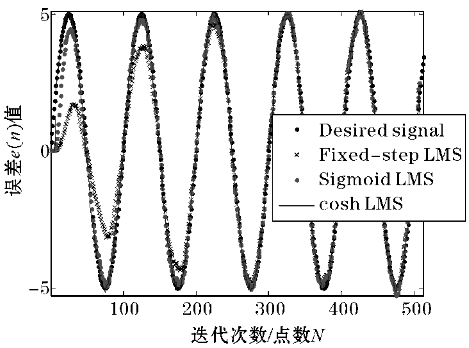

图 5　3 种算法对期望信号的跟踪情况

由图 4 可以得出，新的 LMS 算法在一定的信噪比范围内能够达到较好的自适应效果，滤波后的波形与期望信号近乎一致。图 4(c) 表示均方误差曲线图，在收敛速度快的同时均方误差趋近于零，效果比较理想。为对比其他两种算法性能，先对期望信号的跟踪情况对比分析，仿真结果如图 5 所示。

由图 5 可以看出，固定步长 LMS 算法对期望信号的跟踪效果最差，大概在迭代 170 次时才能精确追踪到期望信号；Sigmoid 型 LMS 算法对期望信号的跟踪性能次之，大概迭代 40 次时可以精确追踪到期望信号；双曲余弦函数对期望信号的跟踪性能最好，大概迭代 10 次左右，就可以精确追踪到期望信号。

因为每次仿真结果均比较接近，因此取单个样本作为均方误差的估计依据来说明误差信号的收敛情况，得到 3 种算法的误差和均方误差曲线如图 6、图 7 所示。

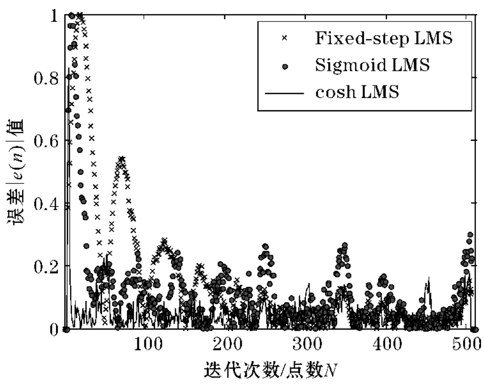

图 6　3 种算法的误差信号 $e(n)$ 曲线

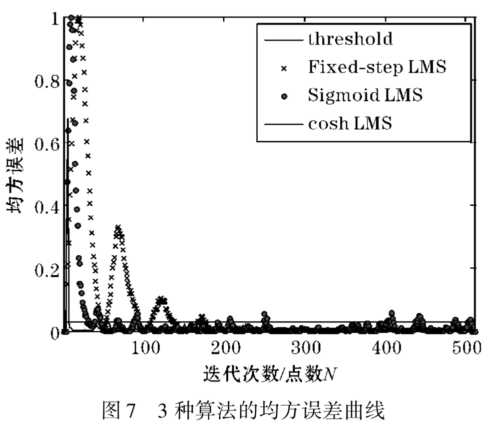

图 7　3 种算法的均方误差曲线

由图 6 可以看出，固定步长 LMS 算法，收敛速度较慢，但是其稳态误的波动范围较小，分析原因，可能是因为步长为常数，仿真过程中没有选取到最佳步长；Sigmoid 型 LMS 算法收敛速度较快，但是其稳态误差的波动较大，比固定步长的稳态误差波动还要大一些，分析原因猜测可能是步长因子在稳态阶段曲线过于陡峭，变化不够缓慢造成，这也是该算法的不足之处；双曲余弦型 LMS 算法就能很好地克服前两种算法的不足之处，相比前两种算法，无论是从误差的收敛速度还是误差稳态分析，双曲余弦型 LMS 都具有更优性能。从图 5 看，3 种 LMS 算法对期望信号的跟踪曲线也能清楚地反映出 LMS 算法性能好坏。

在图 7 中，根据收敛曲线特征生成一个收敛门限 T，令门限值 $T=3\ \%$，规定如果均方误差值>门限值 T，则认为满足稳态收敛状态；如果均方误差 ≤ 门限值 T，则认为不满足稳态收敛状态。选取第一次达到稳态收敛状态时刻的横轴数值 N_C，记为收敛时刻迭代次数，N_C 表征每种算法的收敛速度；对 N_C 时刻以后的所有均方误差值都认为是在稳态收敛状态，对稳态收敛状态的所有均方误差作统计均值处理，记为 $E[\zeta(n)]=\frac{1}{N-N_C}\sum_{n=N_C}^{N}|e(n)|^2$，$E[\zeta(n)]$ 表征收敛后稳态误差的性能。取 $SNR=40$ dB，$SNR=20$ dB 和 $SNR=10$ dB 3 种不同信噪比，3 种算法的性能如下表格所示。

表 1　不同参数下的 3 种 LMS 算法性能

SNR/dB	LMS algorithm	N_C	$E[\zeta(n)]$
40	Fixed-step LMS	40	0.0420
	Sigmoid LMS	42	0.0389
	cosh LMS	9	0.0283
20	Fixed-step LMS	50	0.0954
	Sigmoid LMS	47	0.0849
	cosh LMS	13	0.0394
10	Fixed-step LMS	50	0.2170
	Sigmoid LMS	54	0.1173
	cosh LMS	22	0.1013

4　结束语

研究过程中发现：3 种 LMS 算法对输入信号的噪声大小要求较高，低信噪比，滤波效果并不好，误差的收敛特性也不是预想的效果；步长因子必须按照输入信号的统计特性取值，如自相关矩阵的最大特征值，当输入信号的统计特征不明显或者不容易求出最大特征值时，选择符合条件的 μ 值是必要的前提。因此，在 LMS 算法的实际应用中，需要特别注意这两个问题。

参考文献：

[1] 罗小东，贾振红，王强. 一种新的变步长 LMS 自适应滤波算法[J]. 电子学报，2006，34(6)：1123.

[2] B Widrow，M E Hoff. Adaptiveswitchingcircuits[J]. Ire Wescon Conv Rec，1966，4.

[3] 西蒙赫金. 自适应滤波器原理(第四版)[M]. 北京：电子工业出版社，2003.

[4] 汪成曦，刘以安. 改进的最小均方自适应滤波算法[J]. 计算机应用，2012，32(7).

[5] 覃景繁，韦岗. 基于 S 型函数的变步长 LMS 自适应滤波算法[J]. 无线电工程，1996，26(4)：44-47.

[6] 王敏强，郑宝玉. 一种新的可变步长自适应滤波算法[J]. 信号处理，2004，12(6).

[7] 高鹰，谢胜利. 一种变步长 LMS 自适应滤波算法及分析[J]. 电子学报，2001，29(8)：1094-1097.

[8] 刘晓志，吴永刚. 基于双曲余弦函数的智能天线自适应波束形成算法[J]. 新型工业化，2014，4(3)：74-79.

[9] 黄甫堪，陈建文，楼生强. 现代数字信号处理[M]. 北京：电子工业出版社，2003.

A Study of Variable Step Size LMS Algorithm based on Hyperbolic Cosine

SUN Yang[1], CHEN Guang-tuo[1], DU Yu-Ming[1,2], SHE Yong[1,2]

(1. College of Electronic Engineering, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China; 2. The Key Lab of Atmospheric Exploration, China Meteorological Administration, Chengdu 610225, China)

Abstract: The variable Step Length Factor LMS algorithm can overcome the contradiction between the convergence speed and the steady-state error in the fixed step size LMS algorithm. The step factor μ should change according to certain requirements in variable step size LMS algorithm. The step factor μ takes a larger value when the error is bigger or a smaller value when the error is smaller, and the value of The step factor μconverges slowly to zero while the error close to zero. This paper establishes a nonlinear hyperbolic cosine function model between the step size and the error signal. Based on this model, this paper proposes a new LMS algorithm. It made a simulation the new algorithm and conditional fixed step size LMS algorithm and Sigmoid's type variable step LMS algorithm. The simulation results show that the new LMS algorithm has a good performance without losing accuracy and computational complexity.

Keywords: fixed step factor; minimum mean square algorithm; convergence rate; steady-state error