文章编号：2096-1618(2017)06-0675-03

一类洋流运动方程的显示行波解

刘 倩[1]， 周钰谦[2]

(1.西南民族大学计算机科学与技术学院，四川 成都 610041；2.成都信息工程大学应用数学学院，四川 成都 610225)

摘要：考察一类描述洋流运动的偏微分方程模型，借助齐次平衡法的思想，对模型解的形式进行假设。利用改进的Tanh函数法，将该偏微分方程组约化为相应的非线性代数方程组，并借助Mapple的符号运算功能获得模型的三角函数形式的周期行波解和双曲函数形式的行波解的精确表达式。

关 键 词：洋流运动方程；非线性偏微分方程组；周期波解；双曲函数解

中图分类号：O192 **文献标志码**：A

doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2017.06.017

考虑一类重要的洋流运动偏微分方程模型[1]

$$\begin{cases} u_t+uu_x+vu_y-v=-h_x \\ v_t+uv_x+vv_y+u=-h_y \\ h_t+(uh)_x+(vh)_y=0 \end{cases} \tag{1}$$

其中，函数 $h(x,y,t)$ 代表洋流深度，函数 $u(x,y,t)$，$v(x,y,t)$ 分别表示洋流沿 x，y 方向的运动速度。方程组(1)作为一个重要的水波方程，无论从理论角度还是从应用角度，其行波解的研究具有非常重要意义。首先，M. Renardy[2] 重点关注其行波解的不稳定行为，并证明这种不稳定性源自方程的Hopf分岔和带有 O_2 对称性的Hopf分岔。随后，刘倩等[3]利用动力系统的分岔方法讨论方程(1)各种类型有界行波解的存在性条件，并发现模型的周期光滑行波会随系统参数的变化而逐渐失去光滑性，最终演变成周期尖波的动力行为。这些有趣的结果有助从定性分析的角度理解行波解的存在性、稳定性及其动力学演化行为。但是，从计算角度，希望能直接给出模型的显示行波解。因此利用改进的Tanh函数法[4-9]求解方程，得到方程(1)的三角函数周期行波解和双曲函数类型行波解的精确表达式。

对方程(1)做行波变换 $u(x,y,t)=U(\xi)$，$v(x,y,t)=V(\xi)$，$h(x,y,t)=H(\xi)$，$\xi=x+ay-ct$，得到

$$\begin{cases} -cU'+UU'+aVU'-V=-H' \\ -cV'+UV'+aVV'+U=-aH' \\ -cH'+(UH)'+a(VH)'=0 \end{cases} \tag{2}$$

其中$'$表示$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$，对式(2)的第三式关于 ξ 积分一次，得

$$-cH+UH+aVH=g \tag{3}$$

其中 g 是积分常数，则

$$H=\frac{g}{aV+U-c} \tag{4}$$

把式(4)代入式(2)，整理可得

$$\begin{cases} -cU'+UU'+aVU'-V=\dfrac{g(aV'+U')}{(aV+U-c)^2} \\ -cV'+UV'+aVV'+U=\dfrac{ag(aV'+U')}{(aV+U-c)^2} \end{cases} \tag{5}$$

根据齐次平衡法[10]的思想，并利用改进的Tanh函数展开法，可假设方程(5)有如下形式的解

$$U(\xi)=\sum_{i=0}^{i=2}a_i\varphi^i(\xi) \quad V(\xi)=\sum_{i=0}^{i=2}b_i\varphi^i(\xi) \tag{6}$$

其中 a_i，b_i 为待定常数，$\varphi(\xi)$ 满足Riccati方程

$$\varphi'=p+\varphi^2 \tag{7}$$

p 是常数，将方程(6)代入方程(5)，并且利用方程(7)，令方程中所有 f^i 的系数为0，得到关于 a_i，b_i，a，c，p 的非线性代数方程组

$$(ab_2+a_2)^2(2ab_2^{\ 2}+2a_2b_2)=0 \tag{8}$$

$$(ab_2+a_2)^2(2aa_2b_2+2a_2^{\ 2})=0 \tag{9}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(aa_1b_0p+a_0a_1p-a_1cp-b_0)-g(ab_1p+a_1p)=0 \tag{10}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(ab_0b_1p+a_0b_1p-b_1cp+a_0)-ag(ab_1p+a_1p)=0 \tag{11}$$

$$2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(2ab_2^{\ 2}+2a_2b_2)+(ab_2+a_2)^2(3ab_1b_2+2a_1b_2+a_2b_1)=0 \tag{12}$$

$$2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(2aa_2b_2+2a_2^{\ 2})+(ab_2+a_2)^2(aa_1b_2+2aa_2b_1+3a_1a_2)=0 \tag{13}$$

收稿日期：2017-05-05

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11301043)；中国博士后科学基金资助项目(2016M602663)；四川省教育厅创新团队资助项目(15TD0050)

$$(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(2ab_2^2+2a_2b_2)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(3ab_1b_2+2a_1b_2+a_2b_1)+(ab_2+a_2)^2(2ab_2^2p+2ab_0b_2+ab_1^2+2a_2b_2p+2a_0b_2+a_1b_1-2b_2c)=0 \tag{14}$$

$$(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(2aa_2b_2+2a_2^2)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(aa_1b_2+2aa_2b_1+3a_1a_2)+(ab_2+a_2)^2(2aa_2b_2p+aa_1b_1+2aa_2b_0+2a_2^2p+2a_0a_2+a_1^2-2a_2c)=0 \tag{15}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(aa_1b_1p+2aa_2b_0p+2a_0a_2p+a_1^2p-2a_2cp-b_1)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(aa_1b_0p+a_0a_1p-a_1cp-b_0)-g(2ab_2p+2a_2p)=0 \tag{16}$$

$$(ab_0+a_0-c)(2ab_0b_2p+ab_1^2p+2a_0b_2p+a_1b_1p-2b_2cp+a_1)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(ab_0b_1p+a_0b_1p-b_1cp+a_0)-ag(2ab_2p+2a_2p)=0 \tag{17}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(3ab_1b_2p+ab_0b_1+2a_1b_2p+a_2b_1p+a_0b_1-b_1c+a_2)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(2ab_0b_2p+ab_1^2p+2a_0b_2p+a_1b_1p-2b_2cp+a_1)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(ab_0b_1p+a_0b_1cp+a_0)-ag(ab_1+a_1)=0 \tag{18}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(aa_1b_2p+2aa_2b_1p+aa_1b_0+3a_1a_2p+a_0a_1-a_1c-b_2)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(aa_1b_1p+2aa_2b_0p+2a_0a_2p+a_1^2p-2a_2cp-b_1)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(aa_1b_0p+a_0a_1p-a_1cp-b_0)-g(ab_1+a_1)=0 \tag{19}$$

$$2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(2ab_2^2+2a_2b_2)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(3ab_1b_2+2a_1b_2+a_2b_1)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(2ab_2^2p+2ab_0b_2+ab_1^2+2a_2b_2p+2a_0b_2+a_1b_1-2b_2c)+(ab_2+a_2)^2(3ab_1b_2p+ab_0b_1+2a_1b_2p+a_2b_1p+a_0b_1-b_1c+a_2)=0 \tag{20}$$

$$2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(2aa_2b_2+2a_2^2)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(aa_1b_2+2aa_2b_1+3a_1a_2)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(2aa_2b_2p+aa_1b_1+2aa_2b_0+2a_2^2p+2a_0a_2+a_1^2-2a_2c)+(ab_2+a_2)^2(aa_1b_2p+2aa_2b_1p+aa_1b_0+3a_1a_2p+a_0a_1-a_1c-b_2)=0 \tag{21}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(2ab_2^2+2a_2b_2)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(3ab_1b_2+2a_1b_2+a_2b_1)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(2ab_2^2p+2ab_0b_2+ab_1^2+2a_2b_2p+2a_0b_2+a_1b_1-2b_2c)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(3ab_1b_2p+ab_0b_1+2a_1b_2p+a_2b_1p+a_0b_1-b_1c+a_2)+(ab_2+a_2)^2(2ab_0b_2p+ab_1^2p+2a_0b_2p+a_1b_1p-2b_2cp+a_1)=0 \tag{22}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(2aa_2b_2+2a_2^2)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(aa_1b_2+2aa_2b_1+3a_1a_2)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(2aa_2b_2p+aa_1b_1+2aa_2b_0+2a_2^2p+2a_0a_2+a_1^2-2a_2c)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(aa_1b_2p+2aa_2b_1p+aa_1b_0+3a_1a_2p+a_0a_1-a_1c-b_2)+(ab_2+a_2)^2(aa_1b_1p+2aa_2b_0p+2a_0a_2p+a_1^2p-2a_2cp-b_1)=0 \tag{23}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(3ab_1b_2+2a_1b_2+a_2b_1)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(2ab_2^2p+2ab_0b_2+ab_1^2+2a_2b_2p+2a_0b_2+a_1b_1-2b_2c)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(3ab_1b_2p+ab_0b_1+2a_1b_2p+a_2b_1p+a_0b_1-b_1c+a_2)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(2ab_0b_2p+ab_1^2p+2a_0b_2p+a_1b_1p-2b_2cp+a_1)+(ab_2+a_2)^2(ab_0b_1p+a_0b_1p-b_1cp+a_0)=0 \tag{24}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(aa_1b_2+2aa_2b_1+3a_1a_2)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(2aa_2b_2p+aa_1b_1+2aa_2b_0+2a_2^2p+2a_0a_2+a_1^2-2a_2c)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(aa_1b_2p+2aa_2b_1p+aa_1b_0+3a_1a_2p+a_0a_1-a_1c-b_2)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(aa_1b_1p+2aa_2b_0p+2a_0a_2p+a_1^2p-2a_2cp-b_1)+(ab_2+a_2)^2(aa_1b_0p+a_0a_1p-a_1cp-b_0)=0 \tag{25}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(2ab_2^2p+2ab_0b_2+ab_1^2+2a_2b_2p+2a_0b_2+a_1b_1-2b_2c)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(3ab_1b_2p+ab_0b_1+2a_1b_2p+a_2b_1p+a_0b_1-b_1c+a_2)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(2ab_0b_2p+ab_1^2p+2a_0b_2p+a_1b_1p-2b_2cp+a_1)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(ab_0b_1p+a_0b_1p-b_1cp+a_0)-ag(2ab_2+2a_2)=0 \tag{26}$$

$$(ab_0+a_0-c)^2(2aa_2b_2p+aa_1b_1+2aa_2b_0+2a_2^2p+2a_0a_2+a_1^2-2a_2c)+2(ab_0+a_0-c)(ab_1+a_1)(aa_1b_2p+2aa_2b_1p+aa_1b_0+3a_1a_2p+a_0a_1-a_1c-b_2)+(2(ab_0+a_0-c)(ab_2+a_2)+(ab_1+a_1)^2)(aa_1b_1p+2aa_2b_0p+2a_0a_2p+a_1^2p-2a_2cp-b_1)+2(ab_1+a_1)(ab_2+a_2)(aa_1b_0p+a_0a_1p-a_1cp-b_0)-g(2ab_2+2a_2)=0 \tag{27}$$

利用 Maple 软件解非线性代数方程组(8)~(27)得到两组解：

解组 1：$a=a,\ a_0=a_0,\ a_1\}=-ab_1,\ a_2\}=-ab_2,\ b_0=b_0,\ b_1=b_1,\ b_2=b_2,\ c=ab_0+a_0$

解组 2：$a=a,\ a_0=-ab_0+c,\ a_1=a_1,\ a_2=0,\ b_0=b_0,\ b_1=-\dfrac{a_1}{a},\ b_2=0,\ c=c$

将 2 个解组分别代入式(6)和式(2)，同时注意到方程(7)有解

$$\varphi(\xi)=\sqrt{p}\tan(\sqrt{p}\xi)=-\sqrt{p}\cot(\sqrt{p}\xi)\quad p>0 \tag{28}$$

$$\varphi(\xi)=-\sqrt{-p}\tanh(\sqrt{-p}\xi)=\sqrt{-p}\coth(\sqrt{-p}\xi)\quad p<0 \tag{29}$$

可得到方程(1)的精确行波解.

情形 1　将解组 1 代入式(6)和式(2)，得到洋流运动方程(1)有如下三角函数周期行波解和双曲函数行波解。

当 $p>0$ 时，

$$\begin{cases} U(\xi)=a_0-ab_1\sqrt{p}\tan(\sqrt{p}\xi)-ab_2p\tan^2(\sqrt{p}\xi) \\ V(\xi)=b_0+b_1\sqrt{p}\tan(\sqrt{p}\xi)+b_2p\tan^2(\sqrt{p}\xi) \\ H(\xi)=b_0\xi+\frac{1}{2}b_1\ln(1+(\tan(\sqrt{p}\xi))^2)-b_2p\xi+ \\ \qquad b_2\sqrt{p}\tan(\sqrt{p}\xi) \end{cases} \tag{30}$$

当 $p<0$ 时,

$$\begin{cases} U(\xi)=a_0+ab_1\sqrt{-p}\tanh(\sqrt{-p}\xi)+ab_2p(\tanh(\sqrt{-p}\xi))^2 \\ V(\xi)=b_0-b_1\sqrt{-p}\tanh(\sqrt{-p})-\mathrm{b}_2\mathrm{p}(tanh(\sqrt{-\mathrm{P}}))^2 \\ H(\xi)=b_0\xi+\frac{1}{2}b_1\ln(\tanh^2(\sqrt{-p}\xi)-1)+\frac{b_2p\tanh(\sqrt{-p}\xi)}{\sqrt{-p}}+ \\ \qquad \frac{b_2p}{2\sqrt{-P}}\ln\frac{\tanh(\sqrt{-p}\xi-1)}{\tanh(\sqrt{-p}\xi+1)} \end{cases} \tag{31}$$

其中,$\xi=x+ay-ct$, 且 $c=ab_0+a_0$。

情形 2　将解组 2 代入式(6)和式(2),得到洋流运动方程有(1)有如下三角函数周期行波解和双曲函数行波解。

当 $p>0$ 时,

$$\begin{cases} U(\xi)=(-ab_0+c)-ab_1\sqrt{p}\tan(\sqrt{p}\xi) \\ V(\xi)=b_0+b_1\sqrt{p}\tan(\sqrt{p}\xi)\quad p>0 \\ H(\xi)=b_0\xi+\frac{1}{2}b_1\ln(1+(tan(\sqrt{p}\xi))^2) \end{cases} \tag{32}$$

当 $p<0$ 时,

$$\begin{cases} u(\xi)=(-ab_0+c)-ab_1\sqrt{-p}\tanh(\sqrt{-p}\xi) \\ V(\xi)=b_0+b_1\sqrt{-p}\tanh(\sqrt{-p}\xi)\quad p>0 \\ H(\xi)=b_0\xi-\frac{1}{2}b_1\ln(\tanh^2(\sqrt{-p}\xi)-1) \end{cases} \tag{33}$$

其中 $\xi=x+ay-ct$。

参考文献:

[1]　R W Griffiths P D Killworth, M E Stern. Ageostrophic instability of ocean currents[J]. J. Fluid Mech., 1982, 117:343-377.

[2]　M Renardy. Bifurcation of traveling waves resulting from resonant mode crossings in oceanic currents[J]. J. Mech. B/Fluids, 1999, 18:35-46.

[3]　Q Liu, Y Q Zhou, W N Zhang, et al. Bounded traveling waves of the oceanic currents motion equations[J]. Appl. Math. Comput., 2010, 216:107-113.

[4]　周钰谦,张健. 一类反应扩散方程的显示复线形孤子解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2004, 27:144-146.

[5]　周钰谦, 张健, 曾德胜. 耦合 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的新显示解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29:46-49.

[6]　周钰谦, 张健, 刘倩. 耦合 Klein-Gordon-Schrödinger 方程显示解的统一构造[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29:166-170.

[7]　刘倩,周钰谦. 二维 Klein-Gordon-Zakharov 方程新孤波解的构造[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2010, 33:335-338.

[8]　Z Lü, H Zhang. Soliton like and multi-soliton like solutions for the Boiti-Leon-Pempinelli equation[J]. Chaos. Soliton. Fract., 2004, 19:527-531.

[9]　W G Feng, K M Li, Y Z Li, et al. Explicit exact solutions for (2+1)-dimensional Boiti-Leon-Pempinelli equation, Commun[J]. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2009, 14:2013-2017.

[10]　M L Wang, Y B Zhou, Z B Li. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Phys. Lett. A, 1996, 216:67-75.

Exact Traveling Wave Solutions of the Oceanic Currents Motion Equations

LIU Qian[1],　ZHOU Yu-qian[2]

(1. College of Computer Science and Technology, Southwest University for Nationalities, Chengdu 610041, China; 2. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: We consider the oceanic currents motion equations. By using the generalized tanh-method and the symbolic toolbox of Mapple, some explicit solutions of the oceanic currents motion equations are obtained, including the trigonometric functions periodic travelling wave solutions and the hyperbolic function travelling wave solutions.

Keywords: the oceanic currents motion equations; nonlinear PDEs; periodic wave solutions; hyperbolic function solutions