

文章编号: 2096-1618(2018)01-0103-04

Joseph-Egri 方程行波解的分岔

郭嘉¹, 周钰谦^{1,2}, 范飞廷¹

(1. 成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225; 2. 电子科技大学数学科学学院, 四川 成都 611731)

摘要:自从 Joseph-Egri 方程被提出以来,人们用了多种方法去对获取它的精确行波解,但是依然有一些解可能被丢失,并且无法解释参数变化时解的演化。为了解决这些问题,利用动力系统分岔方法研究了 Joseph-Egri 方程的行波系统,获得了其不同拓扑结构的相图。这些相图清楚地展示了系统所有的有界轨道。对照这些有界轨道,通过计算复杂的椭圆积分,获得了系统的椭圆函数周期波解和孤波解。

关键词:应用数学;微分方程及其应用;Joseph-Egri 方程;相图;动力系统;分岔;孤波解

中图分类号: O241.8

文献标志码: A

doi: 10.16836/j.cnki.jcuit.2018.01.018

0 引言

在数学物理领域中的许多波动现象都可以用非线性偏微分方程来描述,而偏微分方程的行波解在研究解的长时间行为和复杂非线性波动现象中一直扮演着重要的角色。

考虑如下非线性发展方程

$$U_t + U_x + UU_x + \delta U_{xxx} = 0 \quad (1)$$

其中变量 x 表示水流在水平方向的位移, t 表示时间, $U(x, t)$ 表示水流在垂直方向的位移, δ 表示弥散系数。此方程由 Joseph 和 Egri 在 1977 年提出^[1], 故被称作 Joseph-Egri 方程,是一个描述水流穿过水中波状孔洞的动力学方程,该模型可以理解为对一个经典的非色散的冲击波的分散模拟。自该方程被提出以来,其行波解的研究就受到人们关注。人们使用了各种各样的直接方法去获得它行波解的精确表达式,例如:扩展的齐次平衡法^[2]、推广的简单方程方法^[3]、扩展 G'/G 法^[4]、多项式完全判别系统法^[5]等。

尽管通过以上方法已经获得了 Joseph-Egri 方程许多的精确解,但是依然有一些解可能被丢失。另外,虽然利用这些方法获得方程的行波解简洁、高效,然而却不能清楚地解释当参数变化时这些解如何演化。因此,我们将使用动力系统分岔方法对 Joseph-Egri 方程进行研究。近年来,这种方法已经被广泛运用到各种方程。例如:RLW-Burgers 方程^[6]、Camassa-Holm 方程^[7]、Boussinesq 方程^[8]、(2+1) 维 Broer-Kaup-Kupershmidt 方程^[9]等。文中将通过该方法对 Joseph-Egri 方程的行波系统进行分岔分析以获得该方程所有的有界

行波解。

1 Joseph-Egri 方程行波系统的分岔

对方程(1)做行波变换 $U(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - ct$, $c \neq 0$ 是波速,可化为

$$-cu' + u' + uu' + c^2\delta u''' = 0 \quad (2)$$

其中'代表 $d/d\xi$, 对方程(2)两边积分可得

$$\frac{1}{2}u^2 - (c-1)u + c^2\delta u'' = e \quad (3)$$

其中 e 是积分常数。由方程(3)可解出 u''

$$u'' = -\frac{u^2 - 2(c-1)u - 2e}{2c^2\delta} \quad (4)$$

其中 $\delta \neq 0$ 。方程(4)可以转化为如下等价的平面系统

$$\begin{cases} u' = y, \\ y' = -\frac{u^2 - 2(c-1)u - 2e}{2c^2\delta} \end{cases} \quad (5)$$

通过计算可以判断这是一个 Hamilton 系统,并有如下能量函数

$$H(u, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{u^3 - 3(c-1)u^2 - 6eu}{6c^2\delta} \quad (6)$$

令 $F = (c-1)^2 + 2e$, 给出关于系统(5)全局性质的相关定理。

定理:当 $4(c-1)^2 - 8e > 0$ 时,若 $\delta < 0$, 系统(5)存在一个鞍点 $B(c-1 + \sqrt{F}, 0)$ 和一个中心 $A(c-1 - \sqrt{F}, 0)$, 且存在一条同宿轨 γ^β (右支)连接着鞍点 B 。中心 A 周围存在一簇周期轨:

$$\Gamma^A(h) := \{H(u, y) = h, h \in \left(-\frac{(c-1)^3 - F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}, -\frac{(c-1)^3 + F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}\right)\}$$

收稿日期:2017-08-13

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11301043, 11171046);四川省教育厅重点资助项目(12ZA224)

当 $h \rightarrow -\frac{(c-1)^3 - F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$ 时, $\Gamma^A(h)$

趋近于同宿轨 γ^B 。

当 $h \rightarrow -\frac{(c-1)^3 + F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$ 时, $\Gamma^A(h)$

趋近于中心 $A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ 。

若 $\delta > 0$, 系统(5)存在一个鞍点 $A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ 和一个中心 $B(c-1+\sqrt{F}, 0)$, 且存在一条同宿轨 γ^A (左支)连接着鞍点 $A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ 。中心 $B(c-1+\sqrt{F}, 0)$ 周围存在一簇周期轨:

$$\Gamma^B(h) := \{H(u, y) = h, h \in$$

$$\left(-\frac{(c-1)^3 + F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}, -\frac{(c-1)^3 - F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}\right\}$$

当 $h \rightarrow -\frac{(c-1)^3 + F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$ 时, $\Gamma^B(h)$

趋近于同宿轨 γ^A 。

当 $h \rightarrow -\frac{(c-1)^3 - F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$ 时, $\Gamma^B(h)$

趋近于中心 $B(c-1+\sqrt{F}, 0)$ 。

当 $4(c-1)^2 + 8e = 0$ 时, 系统(5)只有1个退化的平衡点, 此平衡点为尖点。

当 $4(c-1)^2 + 8e < 0$ 时, 系统没有实平衡点。

证明: 首先讨论系统(5)的平衡点的个数。当 $4(c-1)^2 + 8e > 0$ 时, 系统(5)有2个平衡点 $A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ 和 $B(c-1+\sqrt{F}, 0)$, 显然 A 在 B 的左边。当 $4(c-1)^2 + 8e = 0$ 时, 系统(5)有唯一的平衡点 $C(c-1, 0)$ 。当 $4(c-1)^2 + 8e < 0$ 时, 系统(5)没有实平衡点(如图1)。

需要进一步判断这些平衡点的类型。为此记 $M(u, y)$ 是系统(5)在平衡点 (u, y) 处的 Jacobi 矩阵。

情形1: $4(c-1)^2 + 8e > 0$

可以计算

$$M(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{(c-1)^2 + 2e}}{c^2\delta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{(c-1)^2 + 2e}}{c^2\delta} & 0 \end{bmatrix}$$

由矩阵 $M(A)$ 与 $M(B)$ 可以判断: 若 $\delta < 0$, $A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ 为系统的中心, $B(c-1+\sqrt{F}, 0)$ 为系统的鞍点; 若 $\delta > 0$, 则 $A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ 为系统的鞍点, 而 $B(c-1+\sqrt{F}, 0)$ 为系统的中心。

通过计算, 平衡点 A 和 B 处的能量值分别为:

$$H(A) = -\frac{(c-1)^3 - F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$$

$$H(B) = -\frac{(c-1)^3 + F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$$

由 Hamilton 系统的性质^[18]可知存在一条同宿轨线 γ^B 连接着鞍点 $B(c-1+\sqrt{F})$ 。再根据 A 和 B 处能量值可得: 若 $\delta < 0$, 有 $H(A) < H(B)$, 此时存在一族围绕中心 $A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ 的闭轨族:

$$\Gamma^A(h) := \{H(u, y) = h, h \in$$

$$\left(-\frac{(c-1)^3 - F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}, -\frac{(c-1)^3 + F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}\right\}$$

并且当 h 趋于鞍点 B 的能量 $-\frac{(c-1)^3 - F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$

时, $\Gamma^A(h)$ 趋近于同宿轨 γ^B , 当 h 趋于中心 A 的能量 $-\frac{(c-1)^3 + F\sqrt{F} + 3e(c-1)}{3c^2\delta}$ 时, $\Gamma^A(h)$ 趋近于中心

$A(c-1-\sqrt{F}, 0)$ (如图2)。同理可以证明 $\delta > 0$ 时的情况(如图3)。

情形2: $4(c-1)^2 + 8e = 0$

由前面的假设我们有

$$M(C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从系数矩阵 $M(C)$ 中可以看出 $M(C)$ 具有双零特征根, 故 C 为退化平衡点。根据文献[19], 可以将系统(5)按照如下的标准形式进行规范化

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = a_k x^k [1+h(x)] + b_n x^n y [1+g(x)] + y^2 p(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

其中 $h(x), g(x), p(x, y)$ 是 $S(O)$ 内的解析函数; $h(O) = g(O) = 0$; $a_k \neq 0, k \geq 2$; b_n 可为0, 当 $b_n \neq 0$ 时, $n \geq 1$ 。通过计算可得当 $4(c-1)^2 + 8e = 0$ 时, 有 $k = 2, b_n = 0$, 根据文献[20]第二章第七节的相关结果, 判定平衡点 C 称为尖点(如图4)。

2 Joseph-Egri 方程的有界行波

从相图中可以看出, 图2.3均有相似的有界轨道, 我们这里给出图2的有界轨道所对应的有界行波解的表达式, 图3所对应的有界行波解的表达式可以类似得到。

根据方程(5)和(6)可以知道同宿轨道 γ^B 的表达式由如下积分决定

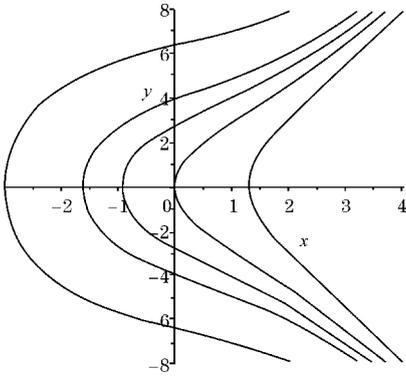


图 1 取 $c=1, \delta=-\frac{1}{2}, e=-2$ 时, 系统(5)的相图

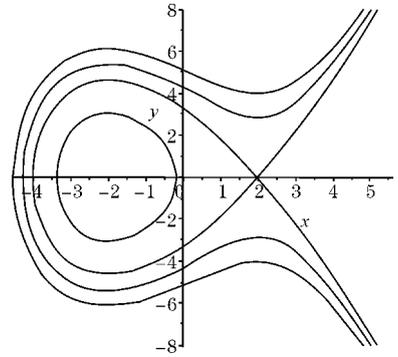


图 2 取 $c=1, \delta=-\frac{1}{2}, e=0$ 时, 系统(5)的相图

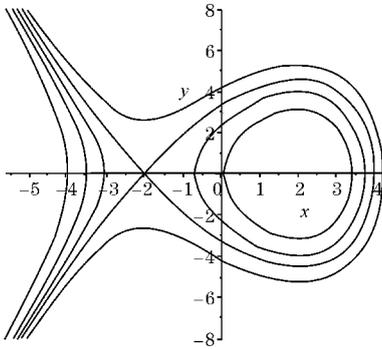


图 3 取 $c=1, \delta=\frac{1}{2}, e=0$ 时, 系统(5)的相图

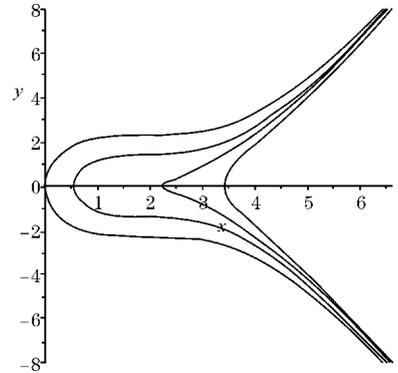


图 4 取 $c=3, \delta=-\frac{1}{18}, e=-2$ 时, 系统(5)的相图

$$\int_{u_0}^u \frac{du}{[u - (c - 1 - \sqrt{(c - 1)^2 + 2e})] \sqrt{c - 1 + 2\sqrt{(c - 1)^2 + 2e} - u}} = \sqrt{\frac{1}{-3c^2\delta}} \int_0^\xi d\xi, \xi > 0$$

$$- \int_u^{u_0} \frac{du}{[u - (c - 1 - \sqrt{(c - 1)^2 + 2e})] \sqrt{c - 1 + 2\sqrt{(c - 1)^2 + 2e} - u}} = \sqrt{\frac{1}{-3c^2\delta}} \int_\xi^0 d\xi, \xi < 0$$

其中 $u_0 = c - 1 + 2\sqrt{(c - 1)^2 + 2e}$, 通过计算可得:

$$u(\xi) = G + \frac{4(u_0 - G)e^{\sqrt{\frac{u_0 - G}{-3c^2\delta}}|\xi|}}{(1 + e^{\sqrt{\frac{u_0 - G}{-3c^2\delta}}|\xi|})}$$

其中 $G = c - 1 - \sqrt{(c - 1)^2 + 2e}, u_0 = c - 1 + 2\sqrt{(c - 1)^2 + 2e}$ 。

事实上, 当 $4(a + b) + 8be > 0$ 且 $\delta < 0$ 时, $\Gamma^A(h)$ 中任一条周期轨都可以表达为如下形式

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{-3c^2\delta}} \sqrt{(p - u)(u - q)(u - r)} \quad (7)$$

其中 p, q, r 为实常数且满足 $p > u > q > r$, 设该周期轨的周期是 $2T$ 并取初值 $u(0) = q$, 结合方程(5)和(7)式可得:

$$\int_q^u \frac{du}{\sqrt{(p - u)(u - q)(u - r)}} = \sqrt{\frac{1}{-3c^2\delta}} \int_0^\xi d\xi, 0 < \xi < T$$

$$- \int_u^q \frac{du}{\sqrt{(p - u)(u - q)(u - r)}} = \sqrt{\frac{1}{-3c^2\delta}} \int_\xi^0 d\xi, -T < \xi < 0$$

综上

$$\int_q^u \frac{du}{\sqrt{(p - u)(u - q)(u - r)}} = \sqrt{\frac{1}{-3c^2\delta}} |\xi|$$

通过计算椭圆积分, 有

$$\int_q^u \frac{du}{\sqrt{(p - u)(u - q)(u - r)}} = g \operatorname{sn}^{-1} \left(\sqrt{\frac{(p - r)(u - q)}{(p - q)(u - r)}}, k \right)$$

其中 $g = \frac{2}{\sqrt{p - r}}$ 和 $k^2 = \frac{p - q}{p - r}$, 最终可以计算出 Joseph-Egri 的椭圆函数周期波解

$$u(\xi) = r + \frac{(p - r)(q - r)}{p - r - (p - q) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{p - r}{-12c^2\delta}} |\xi| \right)}$$

3 结论

使用动力系统的分岔方法对 Joseph-Egri 方程的行波系统进行了研究, 证明了 Joseph-Egri 方程只有两类有界行波解, 即孤波解和周期波解, 并获得了它们的表达式。这些结果展示了动力系统的分岔方法对非线性发展方程的行波解的研究是一种非常有效的方法,

通过对行波系统相空间的分岔分析,我们可以清楚地找到系统的有界轨道,从而获得方程的有界波解。

致谢:感谢成都信息工程大学科学研究基金(J201219)对本文的资助

参考文献:

- [1] R I Joseph, R Egri. Another possible model equation for long waves in nonlinear dispersive systems [J]. *Physics Letters A*, 1977, 61: 429-432.
- [2] N Taghizadeh, M Mirzazadeh. Exact travelling wave solutions of Joseph-Egri (TRLW) equation by the extended homogeneous balance method [J]. *Applied Mathematics and computation*, 2012, 4(1): 96-104.
- [3] 盖立涛, 苏道毕力格, 鲍春玲. 推广的简单方程方法对两个非线性发展方程的应用[J]. *内蒙古工业大学学报*, 2015, 33(1): 1-4.
- [4] 张维, 陈自高. 两类非线性发展方程的扩展 G'/G 法精确解[J]. *洛阳师范学院学报*, 2015, 34(2): 12-17.
- [5] 那叶, 代冬岩, 熊柳亚, 等. Joseph-Egri 方程的 solitary wave 解[J]. *高师理科学刊*, 2016, 36(8): 18-24.
- [6] Y Q Zhou, Q Liu. Kink waves and their evolution of the RLW-Burgers equation [J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012: 222-232.
- [7] J B Li, Y S Li. Bifurcations of travelling wave solutions for a two-component Camassa-Holm equation [J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2008, 8: 1319-1330.
- [8] J B Li. 两类 Boussinesq 方程的行波解分支[J]. *中国科学*, 2008, 38(11): 1221-1234.
- [9] Y Q Zhou, Q Liu, W N Zhang. Bifurcation of travelling wave solutions for the (2+1)-dimensional Broer-Kaup-Kupershmidt equation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 204: 210-215.
- [10] J B Li. Existence and breaking property of real loop-solutions of two nonlinear wave equations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, 5: 537-547.
- [11] A M Wazwaz. Gaussian solitary waves for the logarithmic-BBM and the logarithmic-TRLW equations [J]. *Mathematical Chemistry*, 2016, 54: 252-268.
- [12] J B Li, G R Chen. Bifurcations of travelling wave solutions in a microstructured solid model [J]. *Bifurcation and Chaos*, 2013, 2: 1-18.
- [13] B Katzungrubler, M Kurpa, P Szmolyan. Bifurcation of travelling waves in extrinsic semiconductors [J]. *Physica D*, 2000, 144: 1-19.
- [14] Y Q Zhou, Q Liu, W N Zhang. Bounded traveling waves of the Burgers-Huxley equation [J]. *Nonlinear Analysis*, 2011, 74: 1047-1060.
- [15] B He, et al. Bifurcations of travelling wave solutions for a variant of Camassa-Holm equation [J]. *Nonlinear Analysis*, 2008, 9: 222-232.
- [16] J Huang, et al. Existence of travelling wave solutions diffusive predator-prey model [J]. *Journal of Mathematics Biology*, 2003, 46: 132-152.
- [17] Z R Liu, C X Yang. The application of bifurcation method to a higher-order KdV equation [J]. *Mathematics Analysis Applied*, 2002, 275: 1-12.
- [18] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- [19] 张伟年, 杜正东, 徐冰. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [20] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

Bifurcation of Traveling Wave Solutions of the Joseph-Egri Equation

GUO Jia¹, ZHOU Yu-qian^{1,2}, FAN Fei-ting¹

(1. College of Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China; 2. School of mathematics Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: Since the Joseph-egri equation was proposed, many methods are used to obtain its exact traveling wave solutions. However, there are still many solutions that are lost, and they can't explain how the solutions evolve when the parameters change. To solve these problems, the bifurcation method of dynamical system is employed to investigate the Joseph-Egri equation. We obtain different phase portraits of traveling wave system of it. According to these phase portraits, all bounded traveling waves are identified. Furthermore, by calculating some complicated elliptic integrals, we obtain the exact expressions of periodic wave solutions and solitary wave solutions.

Keywords: applied mathematics; differential equation and their applications; Joseph-Egri equation; phase portraits; dynamical system; bifurcation; solitary wave solution