

数学建模在疾病传播方面的应用

廖富毅

(成都信息工程大学数学学院, 四川 成都 610225)

摘要: 传染病是由病原微生物入侵人体所引起的一类疾病, 如今多发的各类传染病, 如流行性感冒、乙肝、结核病、禽流感以及 2020 年席卷全球的新型冠状病毒等等, 它们对人类的健康、日常生活和社会经济发展构成了很大威胁。因此制定有效传染病防治策略是极其重要的。借助于数学模型了解传染病的内在传播机理, 由此制定出更佳的防疫政策来抵御疾病传播。

关键词: 数学建模; 传染病模型; 传染病的控制; SIR 模型

中图分类号: O29

文献标志码: A

doi: 10. 16836/j. cnki. jcuit. 2021. 02. 018

1 数学模型在疾病传播方面的文献概述

由于近年来频发的各类传染疾病, 使得当前国际社会对于借助数学模型来预测传染病传播趋势从而制定出更加有效的防控手段给予了更多的关注。纵观国内的研究文献可以发现, 将数学建模应用在疾病传播主要集中在建模工具种类的选取和传染病的影响因素两个方面。

在建模工具种类的选取方面: 方乐恒等^[1]通过构建真实的城市地图来模拟展示城市路网、交通通行区域、收治医院等真实场景, 有效地展示了 COVID-19 疫情发展进程, 为未来中国疫情的防控提供了坚实的智能化体系。严阅等^[2]通过构建时滞动力学系统模型, 在该模型中加入传染病传播的时滞过程, 从而可以较为准确地描述 COVID-19 病毒的潜伏周期和整个治疗的时效周期, 为准确预测中国疫情的未来发展趋势, 提供了有效的借鉴和参考。王锐涵等^[3]通过将数据分析和建模机理相结合的方法构建了 SIS 解释模型、BPNN 模型以及局部加权线性回归模型来模拟肺结核的传播过程, 从而为肺结核传染疾病工作的防控提供了科学依据。李华等^[4]通过数学建模和计算机模型统一整合, 分析了手足口病每年的数量以及接种疫苗的情况, 预测手足口病在 2017 年的发展趋势, 为手足口病的预测打下了理论基础。

传染病的影响因素方面: 谢丽等^[5]在创新扩散视角下, 研究谣言散播对疾病传染的影响, 并利用智能体建模技术进行了仿真实验, 研究发现谣言散播不利于疾病的控制, 会造成治理资源的浪费。付强等^[6]通过

构建非线性传染病模型来研究隔离措施对 COVID-19 病情的防控作用, 通过研究发现, 隔离措施可以加大疫情的结束程度, 对于疫情的防控有着关键性的影响。葛洪磊等^[7]从七个维度五种情景模型来研究应急物资配置对于重大传染病的防控影响, 研究结果显示应急物资配置的空间、信息、物资、供求等对疫情的防控有着关键性的影响。

总体来看, 以上文献对于了解数学建模应用于传染病防控有着重要的借鉴和参考作用, 在新形势下, 将 SIR 模型应用在疾病传播方面有着重要的研究意义。为此, 本文主要借助数学模型来了解传染病的内在传播机理, 由此制定出更佳的防疫政策来抵御疾病传播。

2 SIR 模型在传染病传播方面的应用

相关领域专家和学者在揭示传染病的传播现象时常常从医学角度出发, 这使得某疾病在某区域传播时, 受影响者将表现为一个变化较小的常数。而实际情况是该数值由于受到众多因素影响将发生很大变化和波动, 由于脱离实际情况, 难以得到令人满意的研究。相继有部分学者将数学模型引入到传染病的研究过程中, 以此来进行分析和模拟, 实践结果表明, 由此能够获得更佳的效果, 对于之前一些难以解决的问题也慢慢找到了答案。

SIR (susceptibles infectives recovered) 是最早的传染病数学模型, 是由 Kermack 与 McKendrick 共同建立, 整个过程以动力学方法为主导^[8]。由该模型可知, 依据人群的患病与否大致分为以下三类: 易感者 (susceptibles), 在某时刻还尚未染病但其感染风险较高, 这里假设数量为 $S(t)$; 染病者 (infectives), 在某

时刻已被感染且自身成为了一类传染源,其数量设为 $I(t)$;恢复者(recovered),在某时刻得到合理治疗已经康复,将从染病者中移出,其数量设为 $R(t)$ 。若 t 时刻的总人口数量为 $N(t)$,则上述提到的各类人群数量存在如下关系:

$$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$$

(1)

- SIR 模型的建立基于以下 3 个假设:
- (i) 忽略各类群动力因素,如人口的出生、死亡、流动等。使得人口数量始终保持恒定,即 $N(t) = K$ 。
 - (ii) 假设易感者在接触感染者后会被传染。假设在 t 时刻,单位时间内,某环境下易感者总数 $S(t)$ 与一个病人能传染的易感者数目存在比例系数为 β 的正相关关系,则被所有病人传染的人数为 $\beta S(t)I(t)$ 。
 - (iii) 设存在一时刻 t ,此时恢复者与患病者数量成正比例, γ 为当下的比例系数,则单位时间内恢复者数量为 $R(t)=\gamma I(t)$ 。

基于上述 3 种假设可得到图 1 所示的易感者从患病到恢复的过程框图。

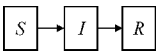


图 1 易感者从患病到恢复的转化图

SIR 基础模型用微分方程组表示如下:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt}=\beta SI-\gamma I \\ \frac{dS}{dt}=-\beta SI \\ \frac{dR}{dt}=\gamma I \end{cases}$$

由此解得 $I=(S_0+I_0)-S+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{S}{S_0}$,其中传染病接触数为 $\sigma=\frac{\beta}{\gamma}$ 。

上述提到的是最原始的 SIR 模型,较为简单,缺乏针对性以及精细化程度低,在此基础上众多学者进行了更深入的研究,由此得到了多种推广模型,即:若将动力学因素忽略不计,如出生与死亡等,且传染病不存在潜伏期,则 SRI 模型将被简化为 SI 模型,该类模型适用于患病后几乎无法治愈的情况;而考虑到患者在治愈后体内将产生抗体,由此不会再感染病,则可建立 SIS 模型,仅代表患病者治愈后获得终身免疫力;而对于某些疾病人体难以产生抗体,因此患者在康复后仍存在感染风险,因此只能获得暂时免疫力,由此可建立 SIRS 模型^[9]。若在数学模型建立过程中将传染病潜伏期也纳入考量范围,则需要在模型中加入感染而未发病者(Exposed),由此可建立更复杂的 SEIR 或 SEIRS 模型。综合来看,模型涉及的参数量以及其表

现出的复杂程度将受到种群动力学、疫苗接种、隔离、年龄结构等众多因素的影响^[10]。

3 数学建模在传染病传播领域未来的发展趋势

由于近年来频发的各类传染疾病,使得当前国际社会对于借助数学模型预测传染病传播趋势从而制定出更加有效的防控手段给予了更多的关注。当前已有的传染病传播模型多以揭示传染病的普遍传播规律为主,也出现了较多针对具体疾病建立的专项模型,如麻疹、疟疾、肺结核以及流感等。对各类传染病的传播机理进行分析研究,发现它们的传播方式各不相同,接触传染、垂直传染、媒介传染等是最常见的传染方式。数学模型对已有的传染病进行结构分析发现,大多数模型以常微分方程组的形式出现,由于研究因素的不同其表现有一定的偏差。以年龄结构模型、扩散项模型为例,它们分别以一阶偏微分方程组以及二阶偏微分方程组的形式出现。此外模型基于出生、死亡、患病以及康复规律的不同还可以被分为线性、非线性、自治、非自治等多种类型。当前的研究主要围绕上述模型所表现出的平衡位置、疾病的生存情况以及再生数等多个方面展开。

前面已经提到人口变动、隔离以及年龄结构等众多因素均会对传染病的传播造成影响。总体来看,未来数学模型关于传染病的研究工作主要在以下 3 个方面进行:

第一,利用数学建模研究传染病的影响因素逐渐成为关注点。如将隔离影响、时滞因素、应急物质配置、信息资源、谣言三步等因素考量在内。

第二,基于多学科交融来构建模型成为主要的研究方法。目前乃至未来的发展趋势是,基于数学学科、计算机学科、动力学、物理学科等多种学科的交融来研究传染病的传播将成为主要的研究方法,多种学科的应用可以提升研究的准确性和科学性。

第三,开展对于专项疾病的研究将成为研究的主流,如疯牛病、禽流感、新型冠状病毒、肺结核等。模型越趋向于实际情况,复杂程度将随着越来越近似于真实情况而明显提高,这使得相关的理论研究也不断面临新的困难。

3 结束语

传染病的传播受到多种因素影响,如人员变化、传染病人数量、潜伏周期、个体差异以及防控情况等多重因

素,因此想要弄清它的传播过程非常困难。在设计模型之初,想要将全部因素都考虑进去这几乎是不可能的,因此需要分清主次,化繁为简,先建立初始模型,然后再按照实际情况对其进行修改以及调整,使其逐步趋于完善。实践表明在传染病的防控工作中,建立的数学模型发挥了极其重要的作用,它对疾病走向有较为精确的预测。SIR 为最经典的传染病数学模型,当前众多的新模型都是在此基础上发展而来的,它具有极其重要的意义,希望由此给予当前的疾病防控工作一定的启发。

参考文献:

- [1] 方乐恒,侯嘉文,来俊杰,等. 基于真实城市地图的新型冠状病毒疫情传播仿真数学模型: 计算模拟与防控策略的初试研究[J]. 应用数学学报, 2020, 43(2): 383-401.
- [2] 严阅,陈瑜,刘可伋,等. 基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测[J]. 中国科学: 数学, 2020, 50(3): 385-392.
- [3] 王锐涵,魏海平,曹宇,等. 数据驱动的肺结核传播过程的建模与分析[J]. 计算机应用, 2019, 39(S1): 198-201.
- [4] 李华,刘三红,方奕乐,等. 儿童手足口病的数学建模和计算机模拟[J]. 数学物理学报, 2018, 38(5): 1032-1040.
- [5] 谢丽,赵培忻,丁海欣. 新发突发传染病驱动的谣言传播建模与仿真——双重网络下的研究[J]. 现代情报, 2020, 40(10): 22-33.
- [6] 付强,姚羽. 基于多隔离策略的新冠肺炎疫情建模及分析[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2020, 41(9): 1239-1243.
- [7] 葛洪磊,刘南. 重大传染病疫情演化情境下应急物资配置决策建模分析: 以新冠肺炎疫情为例[J]. 管理工程学报, 2020, 34(3): 214-222.
- [8] WO Kermack AGMcKendrickContributions to the mathematical theory of epidemic JJProc [J]. Roy Soc. , 1927(15): 700-721.
- [9] Anderson R M, May R M. Infections diseases of humans: dynamoics and control [M]. Oxford: Oxford Univ Press, 2016.
- [10] O'Neill P D. A tutorial introduction to Bayesian inference for stochastic epidemic models using Markov chain Monte Carlo methods [J]. Mathematical Biosciences, 2012 ,180:103-114.

Application of Mathematical Modeling in Disease Transmission

LIAO Fuyi

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: Infectious diseases are a type of diseases caused by pathogenic microorganisms invading the human body. Various infectious diseases that occur frequently today, such as epidemic stomach, hepatitis B, tuberculosis, avian influenza, and new coronaviruses that swept the world this year, etc. Human health and daily life and social and economic development pose a great threat. Therefore, it is extremely important to formulate effective infectious disease prevention and control strategies. This article focuses on understanding the internal transmission mechanism of infectious diseases with the help of mathematical models, and hopes that it will be better to formulate better anti-epidemic policies to resist the spread of disease.

Keywords: mathematical model; infectious disease model; control of infectious diseases; SIR model