文章编号: 2096-1618(2021)05-0570-06

分裂平衡问题的 Levitin-Polyak 适定性

王　瑞，胡　容
(成都信息工程大学应用数学学院,四川 成都 610225)

摘要:在 Banach 空间中研究分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的 Levitin-Polyak 适定性。首先分别给出分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的适定性和 Levitin-Polyak 型适定性的概念;然后借助分裂平衡问题近似解集的渐进行为及近似解集与解集的关系,建立分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的 Levitin-Polyak 型适定性的 Furi-Vignoli 型等的距离刻画;最后,在适当的条件下证明分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的适定性与解的存在唯一性等价。

关　键　词:分裂平衡问题;Levitin-Polyak 适定性;近似解集;距离刻画;解的存在唯一性

中图分类号:O176.3　　　**文献标志码**:A

doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2021.05.016

0　引言

适定性自 1966 年 Tykhonov[1] 针对无约束优化问题提出后,受到学者们的广泛关注。适定性本质上是研究具体问题的各类近似解序列的收敛性。无约束优化问题是 Tykhonov 适定的,它要求问题具有唯一解且任意近似序列都收敛于此唯一解,这一概念随后被推广到约束优化问题上。值得注意的是,约束优化问题的 Tykhonov 适定性需要每一个近似序列都必须位于约束集中,而现实问题中的许多数值优化方法所产生的近似序列往往是不可行的,但却无限地接近于约束集。于是,Levitin 和 Polyak[2] 引入了 Levitin-Polyak(简记为 LP)适定性。随后,鉴于问题具有多解的情形,Furi 和 Vignoli[3] 又引入优化问题的广义适定性,它要求优化问题的解集非空且任意近似序列都存在子序列收敛于解集中的某个点。目前,关于优化问题的各类适定性已有丰富的研究成果,见文献[4-11]及其参考文献。由于优化问题与变分不等式问题密切相关,学者们致力将适定性的研究推广到变分不等式问题上,Lucchetti 和 Patrone[12-13] 第一次引入变分不等式问题的适定性概念。关于变分不等式问题的各类适定性研究已硕果累累,与此同时,适定性也被推广到其他变分问题,如鞍点问题、不动点问题、包含问题、平衡问题等,见文献[14-25]及其参考文献。

Censor 等[26] 提出两类新的变分问题——分裂变分不等式问题和分裂优化问题,分别包含经典的变分不等式问题和优化问题作为特例。针对这些新问题,Hu 等[27-28] 分别讨论了分裂变分不等式问题的扰动 LP 适定性和分裂优化问题的扰动 LP 适定性。考虑到平衡问题是变分不等式、优化问题的更广泛形式,研究分裂平衡问题。分裂平衡问题即寻找一个平衡问题的解,使得它在给定的有界线性映射下的像是另一个平衡问题的解。目前,关于分裂平衡问题的适定性研究还甚少。高友[29] 把文献[14]中变分不等式问题在 Lignola 与 Morgan 意义下的适定性结果推广到分裂平衡问题,研究了分裂平衡问题的 LP-α 适定性。将文献[12-13]中变分不等式问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的适定性概念推广到分裂平衡问题,研究分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的 LP 适定性。

1　预备知识

本文除特别说明外,总假设 X、Y 为两个实 Banach 空间,$C\subset X$ 和 $Q\subset Y$ 均为非空闭凸集。给定两个二元映射 $f:X\times X\to R$ 和 $g:Y\times Y\to R$,又给定一个有界线性映射 $A:X\to Y$。文中用→表示强收敛。考虑下列分裂平衡问题(简记为 SEP),即寻求 $x^*\in C$ 使

$$f(x^*,x)\geqslant 0,\ \forall x\in C$$

且 $y^*=Ax^*\in Q$ 满足

$$g(y^*,y)\geqslant 0,\ \forall y\in Q$$

当 $X=Y$,$f=g$,$C=Q$ 且 $A=I$(恒等映射)时,SEP 就退化为经典的平衡问题,即寻求 $x^*\in C$ 使

$$f(x^*,x)\geqslant 0,\ \forall x\in C$$

一些相关定义和引理:

定义 1　称映射 $f:X\times X\to R$ 为半连续的,如果对 $\forall x,y\in X$

收稿日期:2021-04-25
基金项目:四川省科技计划资助项目(2018JY01691)

$$\limsup_{t\to 0^+} f(x+t(y-x),y)\leqslant f(x,y)$$

定义 2　称映射 $f:X\times X\to R$ 为单调的,如果对 $\forall x,y\in X$

$$f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0$$

定义 3　设 A 是 X 中的非空子集,集合 A 的非紧测度 μ 定义如下

$$\mu(A)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i,\mathrm{diam}A_i<\varepsilon,i=1,2,\cdots,n\}$$

其中,diam 表示集合的直径。

定义 4　设 A、B 是 X 中的非空子集。A 和 B 之间的 Hausdorff 距离 $H(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$H(A,B)=\max\{e(A,B),e(B,A)\}$$

其中 $e(A,B)=\sup\limits_{a\in A}d(a,B)$,$d(a,B)=\inf\limits_{b\in B}\|a-b\|$。设 $\{A_n\}$ 是 X 中的非空子集序列,称 $\{A_n\}$ 按 Hausdorff 距离收敛于 A 当且仅当 $H(A_n,A)\to 0$。此外,容易验证,$e(A_n,A)\to 0$ 当且仅当对所有的 $a_n\in A_n$ 有 $d(a_n,A)\to 0$。

引理 1　设 $f:X\times X\to R$,$g:Y\times Y\to R$ 都是单调半连续映射,对 $\forall x\in C$,$f(x,x)\geqslant 0$,对 $\forall y\in Q$,$g(y,y)\geqslant 0$。设 f 和 g 关于第二变量为凸函数,则对 $x^*\in C$,下面的结论等价:

(i) $f(x^*,x)\geqslant 0$, $\forall x\in C$,且 $y^*=Ax^*\in Q$ 满足 $g(y^*,y)\geqslant 0$, $\forall y\in Q$

(ii) $f(x,x^*)\leqslant 0$, $\forall x\in C$,且 $y^*=Ax^*\in Q$ 满足 $g(y,y^*)\leqslant 0$, $\forall y\in Q$

2　分裂平衡问题 Levitin-Polyak 适定性的距离刻画

下面给出分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的 Levitin-Polyak 型适定性的定义,然后讨论其距离刻画。本节除特别说明外,总假设 $f:X\times X\to R$,$g:Y\times Y\to R$ 都是单调半连续映射,对 $\forall x\in C$,$f(x,x)\geqslant 0$,对 $\forall y\in Q$,$g(y,y)\geqslant 0$。又设 f 和 g 关于第二变量为凸函数。

定义 5　称 $\{x_n\}\subset X$ 为 SEP(在 Lucchetti 与 Patrone 意义下)的近似序列,如果存在 $\varepsilon_n>0$ 满足 $\varepsilon_n\to 0$ 使

$$x_n\in C,\ \forall n\in N$$

$$f(x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant 0,\ \forall x\in C,n\in N$$

$$y_n=Ax_n\in Q,\ \forall n\in N$$

$$g(y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant 0,\ \forall y\in Q,n\in N$$

定义 6　称 $\{x_n\}\subset X$ 为 SEP(在 Lucchetti 与 Patrone 意义下)的 Levitin-Polyak(简记为 LP)近似序列,如果存在 $\varepsilon_n>0$ 满足 $\varepsilon_n\to 0$ 使

$$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,\ \forall n\in N$$

$$f(x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant 0,\ \forall x\in C,n\in N$$

$$y_n=Ax_n,d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,\ \forall n\in N$$

$$g(y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant 0,\ \forall y\in Q,n\in N$$

若将定义 5 和定义 6 中 $\varepsilon_n\|x_n-x\|$ 和 $\varepsilon_n\|y_n-y\|$ 都替换成 ε_n,则两定义就分别变成了在 Lignola 与 Morgan 意义下的近似序列和 LP 近似序列。

定义 7　称 SEP 是适定的(resp.,LP 适定的),如果 SEP 具有唯一解且每一个近似序列(resp.,LP 近似序列)都强收敛于该唯一解。

定义 8　称 SEP 是广义适定的(resp.,广义 LP 适定的),如果 SEP 的解集非空且每一个近似序列(resp.,LP 近似序列)都存在子序列强收敛于解集中的某一点。

定义 7 和定义 8 是将文献[12-13]中变分不等式问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的适定性概念拓展到分裂平衡问题的结果。文中,除特别说明外,都考虑分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的适定性。

为研究 LP 型适定性的距离刻画,首先给出 SEP 的近似解集定义如下:

对 $\forall\varepsilon\geqslant 0$,$\Omega(\varepsilon)=\{x\in X\mid d(x,C)\leqslant\varepsilon,f(x,x')+\varepsilon\|x-x'\|\geqslant 0,\ \forall x'\in C$

$y=Ax,d(y,Q)\leqslant\varepsilon,g(y,y')+\varepsilon\|y-y'\|\geqslant 0,\ \forall y'\in Q\}$

现在,讨论 SEP 的 LP 适定性的 Furi-Vignoli 型距离刻画。

定理 1　设 S 是 SEP 的解集,则 SEP 是 LP 适定的当且仅当

$$S\neq\varnothing\text{且}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{diam}(\Omega(\varepsilon))=0 \tag{1}$$

证明　"必要性",假设 SEP 是 LP 适定的,则 SEP 有唯一解,记为 x_0,故 $S=\{x_0\}\neq\varnothing$。接下来用反证法证明 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{diam}(\Omega(\varepsilon))=0$。若 $\mathrm{diam}(\Omega(\varepsilon))\nrightarrow 0,\varepsilon\to 0^+$,则存在 $r>0$,$0<\varepsilon_n\to 0$ 以及 $x_n,x'_n\in\Omega(\varepsilon_n)$ 满足 $\|x_n-x'_n\|>r$, $\forall n\in N$。因为 $x_n,x'_n\in\Omega(\varepsilon_n)$,则 $\{x_n\}$ 和 $\{x'_n\}$ 都是 SEP 的 LP 近似序列。又因为 SEP 是 LP 适定的,所以 $x_n\to x_0$ 且 $x'_n\to x_0$,从而 $\|x_n-x'_n\|\to 0$,这与 $\|x_n-x'_n\|>r$ 矛盾,故 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\mathrm{diam}(\Omega(\varepsilon))=0$。

"充分性",假设式(1)成立,由 $S\subset\Omega(\varepsilon)$, $\forall\varepsilon>0$,可知 S 为单点集,任取 SEP 的 LP 近似序列 $\{x_n\}$,则存在 $0<\varepsilon_n\to 0$ 满足

$$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,f(x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant 0,\ \forall x\in C$$

以及

$$y_n=Ax_n,d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,g(y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant 0,\ \forall y\in Q$$

从而 $\{x_n\}\subset\Omega(\varepsilon_n)$。令 x_0 为 SEP 的唯一解,显然 $x_0\in\Omega(\varepsilon_n)$,从而根据式(1)可推知

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\mathrm{diam}(\Omega(\varepsilon_n))\to 0$$

因此,SEP 是 LP 适定的。

若进一步假定 f 和 g 都关于第二变量连续,则将定理1中的条件 $S\neq\varnothing$ 放松成 $\Omega(\varepsilon)\neq\varnothing$,结论仍成立。

定理2 设 f 和 g 都关于第二变量连续,则SEP是LP适定的当且仅当

$$\Omega(\varepsilon)\neq\varnothing,\ \forall\varepsilon>0,\text{且}\lim_{\varepsilon\to0^+}\operatorname{diam}(\Omega(\varepsilon))=0 \tag{2}$$

证明 考虑到 $S\subset\Omega(\varepsilon),\forall\varepsilon>0$,故必要性的证明和定理1一样。

"充分性"假设式(2)成立。现任取SEP的LP近似序列 $\{x_n\}$,则存在 $0<\varepsilon_n\to0$ 满足

$$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,f(x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C$$

以及

$$y_n=Ax_n,d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,g(y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant0,\forall y\in Q$$

从而 $\{x_n\}\subset\Omega(\varepsilon_n)$,于是有

$$0<\operatorname{diam}(\{x_n\})<\operatorname{diam}(\Omega(\varepsilon_n))\to0$$

从而 $\operatorname{diam}(\{x_n\})\to0$,故 $\{x_n\}$ 是Cauchy序列,因此其强收敛于点 $x_0\in X$。下面证明 x_0 是SEP的解。由于 $x_n\to x_0$ 以及 $0<\varepsilon_n\to0$,故根据 $d(\cdot,C)$ 的连续性可得 $d(x_0,C)=0$,从而 $x_0\in C$。根据 f 的单调性可知

$$f(x,x_n)\leqslant-f(x_n,x)\leqslant\varepsilon_n\|x_n-x\|,\ \forall x\in C \tag{3}$$

由式(3)再结合 f 关于第二变量的连续性可推得 $f(x,x_0)\leqslant0,\forall x\in C$。又由于 A 是有界线性映射,则 A 连续,从而 $y_n=Ax_n\to Ax_0$,记 $y_0=Ax_0$,则 $y_n\to y_0$,再根据 $d(\cdot,Q)$ 的连续性可得 $d(y_0,Q)=0$,从而 $y_0\in Q$。根据 g 的单调性可知

$$g(y,y_n)\leqslant-g(y_n,y)\leqslant\varepsilon_n\|y_n-y\|,\ \forall y\in Q \tag{4}$$

由式(4)再结合 g 关于第二变量的连续性可推得 $g(y,y_0)\leqslant0,\forall y\in Q$。综上可得

$$f(x,x_0)\leqslant0,\forall x\in C,\text{且 }y_0=Ax_0\in Q\text{ 满足 }g(y,y_0)\leqslant0,\ \forall y\in Q$$

故根据引理1可知

$$f(x_0,x)\geqslant0,\forall x\in C,\text{且 }y_0=Ax_0\in Q\text{ 满足 }g(y_0,y)\geqslant0,\ \forall y\in Q$$

因此 $x_0\in S$。再由 $S\subset\Omega(\varepsilon)$ 以及 $\operatorname{diam}(\Omega(\varepsilon))\to0$, $\varepsilon\to0$,知 S 为单点集。从而SEP是LP适定的。

下面借助于近似解集与解集的关系讨论SEP的广义LP适定性的距离刻画。

定理3 设 S 是SEP的解集,则SEP是广义LP适定的当且仅当 S 是非空紧集且

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}e(\Omega(\varepsilon),S)=0 \tag{5}$$

证明 "必要性",假设SEP是广义LP适定的,则 $S\neq\varnothing$。现任取 $\{x_n\}\subset S\subset\Omega(\varepsilon),\forall\varepsilon>0$,则 $\{x_n\}$ 是SEP的LP近似序列。由于SEP是广义LP适定的,故存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 强收敛于 S 中的点,从而 S 是紧集。接下来用反证法证明式(5)成立。若 $e(\Omega(\varepsilon),S)\nrightarrow0,\varepsilon\to0^+$,则存在 $r>0,0<\varepsilon_n\to0$,以及 $x_n\in\Omega(\varepsilon_n)$ 满足

$$x_n\notin S+B(0,r),\ \forall n\in N \tag{6}$$

其中 $B(0,r)$ 表示以原点为中心,r 为半径的闭球。由于 $\{x_n\}\subset\Omega(\varepsilon_n)$,则 $\{x_n\}$ 是SEP的LP近似序列,结合SEP是广义LP适定的知,存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 强收敛于 S 中的某一点。这与式(6)矛盾,故式(5)成立。

"充分性",假设 S 为非空紧集且式(5)成立。现任取SEP的LP近似序列 $\{x_n\}$,则 $\{x_n\}\subset\Omega(\varepsilon_n)$。于是结合 S 的紧性知存在序列 $\{\bar{x}_n\}\subset S$ 满足 $\|x_n-\bar{x}_n\|=d(x_n,S)\leqslant e(\Omega(\varepsilon),S)\to0$。再根据 S 的紧性知存在 $\{\bar{x}_n\}$ 的子序列 $\{\bar{x}_{n_k}\}$ 强收敛于 $\bar{x}\in S$。从而 $\{x_n\}$ 也存在相应的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 强收敛于 $\bar{x}\in S$。故SEP是广义LP适定的。

在 f 和 g 都关于第一变量连续的条件下,利用近似解集的非紧测度建立SEP的广义LP适定性的距离刻画。

定理4 设 f 和 g 都关于第一变量连续,则SEP是广义LP适定的当且仅当

$$\Omega(\varepsilon)\neq\varphi,\forall\varepsilon>0,\text{且}\lim_{\varepsilon\to0^+}\mu(\Omega(\varepsilon))=0 \tag{7}$$

证明 "必要性",假设SEP是广义LP适定的,则由定理3可知SEP的解集 S 是非空紧集且 $\lim_{\varepsilon\to0^+}e(\Omega(\varepsilon),S)=0$。从而由 $S\subset\Omega(\varepsilon),\forall\varepsilon>0$,可得

$$\Omega(\varepsilon)\neq\varphi,\ \forall\varepsilon>0$$

下面证明 $\lim_{\varepsilon\to0^+}\mu(\Omega(\varepsilon))=0$。由 $S\subset\Omega(\varepsilon),\forall\varepsilon>0$,可推得

$$\begin{aligned}H(\Omega(\varepsilon),S)&=\max\{e(\Omega(\varepsilon),S),e(S,\Omega(\varepsilon))\}\\&=e(\Omega(\varepsilon),S)\end{aligned}$$

S 的紧性意味着 $\mu(S)=0$,从而由文献[17]中的Cantor定理可得

$$\begin{aligned}\mu(\Omega(\varepsilon))&\leq2H(\Omega(\varepsilon),S)+\mu(S)=2H(\Omega(\varepsilon),S)\\&=2e(\Omega(\varepsilon),S)\end{aligned}$$

结合 $\lim_{\varepsilon\to0^+}e(\Omega(\varepsilon),S)=0$ 可知 $\lim_{\varepsilon\to0^+}\mu(\Omega(\varepsilon))=0$。

"充分性",假设式(7)成立。对 $\forall\varepsilon>0$,根据 f 和 g 关于第一变量的连续性可知 $\Omega(\varepsilon)$ 为闭集。注意到当 $\varepsilon\leqslant\varepsilon'$ 时有 $\Omega(\varepsilon)\subset\Omega(\varepsilon')$。令 $\Omega=\bigcap_{\varepsilon>0}\Omega(\varepsilon)$,则结合式(7),根据参考文献[30]中的定理可知 Ω 是非空紧集且当 $\varepsilon\to0^+$ 时,有:

$$H(\Omega(\varepsilon),\Omega)\to0$$

由 $\Omega=\{x_0\in C\mid f(x_0,x)\geqslant0,\forall x\in C,y_0=Ax_0\in Q,g(y_0,y)\geqslant0,\forall y\in Q\}=S$,可知 S 是非空紧集且满足

$$H(\Omega(\varepsilon),S)\to0,\varepsilon\to0^+$$

任取 SEP 的 LP 近似序列$\{x_n\}$,则存在$0<\varepsilon_n\to 0$满足

$$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,f(x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant 0,\forall x\in C$$

以及

$$y_n=Ax_n,d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,g(y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant 0,\forall y\in Q$$

显然$\{x_n\}\subset\Omega(\varepsilon_n)$。由$\forall\varepsilon>0,S\subset\Omega(\varepsilon)$可得$e(\Omega(\varepsilon_n),S)=H(\Omega(\varepsilon_n),S)\to 0$。从而由 S 的紧性知存在序列$\{\bar{x}_n\}\subset S$满足$\|x_n-\bar{x}_n\|=d(x_n,S)\leqslant e(\Omega(\varepsilon_n),S)\to 0$。再根据 S 的紧性知存在$\{\bar{x}_n\}$的子序列$\{\bar{x}_{n_k}\}$强收敛于$\bar{x}\in S$,因此,$\{x_n\}$也存在相应的子序列$\{x_{n_k}\}$强收敛于$\bar{x}\in S$,故 SEP 是广义 LP 适定的。

3　分裂平衡问题适定性与解的唯一性的关系

在适当的条件下,可证得分裂平衡问题的适定性与其解的存在唯一性等价。

定理 5　设 C 是有限维空间 X 的非空闭凸子集,Q 是实 Banach 空间 Y 的非空闭凸子集。若$f:X\times X\to R$和$g:Y\times Y\to R$都是单调半连续映射,f 和 g 都关于第二变量凸且连续,$A:X\to Y$是有界线性映射。则 SEP 是适定的当且仅当其解唯一。

证明　必要性显然,下面证明充分性。

设 SEP 有唯一解$x^*\in C$,则

$$f(x^*,x)\geqslant 0,\forall x\in C,\text{且 } y^*=Ax^*\in Q\text{ 满足}$$

$$g(y^*,y)\geqslant 0,\forall y\in Q$$

由引理 1 可知

$$f(x,x^*)\leqslant 0,\forall x\in C,\text{且 } y^*=Ax^*\in Q\text{ 满足}$$

$$g(y,y^*)\leqslant 0,\forall y\in Q$$

现任取 SEP 的近似序列$\{x_n\}$,则存在$0<\varepsilon_n\to 0$满足

$$x_n\in C,$$

$$f(x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant 0,\forall x\in C,n\in N$$

$$y_n=Ax_n\in Q$$

$$g(y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant 0,\forall y\in Q,n\in N$$

断言$\{x_n\}$有界。事实上,若假设$\{x_n\}$无界,不失一般性,可设$\|x_n\|\to+\infty$。令$t_n=\dfrac{1}{\|x_n-x^*\|}$,$w_n=t_nx_n+(1-t_n)x^*$。设$t_n\in(0,1]$,$w_n\to w(w\neq x^*)$。由于$x_n\in C,x^*\in C$且$w_n\to w$,根据 C 是 X 的非空闭凸子集可知$w_n\in C$且$w\in C$。结合 f 的单调性以及 f 关于第二变量的凸性可推得,对$\forall x\in C$有

$$\begin{aligned}f(x,w_n)&=f(x,t_nx_n+(1-t_n)x^*)\\&\leqslant t_nf(x,x_n)+(1-t_n)f(x,x^*)\\&\leqslant -t_nf(x_n,x)+(1-t_n)f(x,x^*)\\&\leqslant t_n\varepsilon_n\|x_n-x\|+(1-t_n)f(x,x^*)\end{aligned}\tag{8}$$

由于$t_n=\dfrac{1}{\|x_n-x^*\|}$,易知$t_n\|x_n-x\|$有界,从而考虑当$n\to\infty$时,由式(8)结合 f 关于第二变量的连续性以及$f(x,x^*)\leqslant 0$,可推得$f(x,w)\leqslant 0,\forall x\in C$。

另一方面

$$z_n=Aw_n=A(t_nx_n+(1-t_n)x^*)=t_nAx_n+(1-t_n)Ax^*=t_ny_n+(1-t_n)y^*$$

由于 Q 是 Y 的非空闭凸子集,故$z_n\in Q$且$z_n=Aw_n\to Aw\in Q$。结合 g 的单调性以及 g 关于第二变量的凸性可推得,对$\forall y\in Q$有

$$\begin{aligned}g(y,z_n)&=g(y,t_ny_n+(1-t_n)y^*)\\&\leqslant t_ng(y,y_n)+(1-t_n)g(y,y^*)\\&\leqslant -t_ng(y_n,y)+(1-t_n)g(y,y^*)\\&\leqslant t_n\varepsilon_n\|y_n-y\|+(1-t_n)g(y,y^*)\end{aligned}\tag{9}$$

由于$\|y_n-y\|=\|Ax_n-y\|$,$t_n=\dfrac{1}{\|x_n-x^*\|}$,易知$t_n\|y_n-y\|$有界,从而考虑当$n\to\infty$时,由式(9)结合 g 关于第二变量的连续性以及$g(y,y^*)\leqslant 0$,可推得$g(y,Aw)<0,\forall y\in Q$。故根据引理 1 可知$f(w,x)\geqslant 0,\forall x\in C$,且$Aw\in Q$满足$g(Aw,y)<0,\forall y\in Q$。因此 w 是 SEP 的解,这与“SEP 有唯一解 x^*,且$x^*\neq w$”矛盾。故$\{x_n\}$有界。

不妨任取子序列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}\subset C$满足$x_{n_k}\to\bar{x},k\to\infty$。由 C 是 X 的非空闭凸子集知$\bar{x}\in C$。又因$\{x_n\}$是 SEP 的近似序列,则存在$0<\varepsilon_{n_k}\to 0$满足

$$x_{n_k}\in C$$

$$f(x_{n_k},x)+\varepsilon_{n_k}\|x_{n_k}-x\|\geqslant 0,\forall x\in C\tag{10}$$

$$y_{n_k}=Ax_{n_k}\in Q$$

$$g(y_{n_k},y)+\varepsilon_{n_k}\|y_{n_k}-y\|\geqslant 0,\forall y\in Q\tag{11}$$

考虑当$k\to\infty$时,由式(10)结合 f 的单调性以及 f 关于第二变量的连续性可推得

$$f(x,\bar{x})=\lim_{k\to\infty}f(x,x_{n_k})\leqslant-\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k},x)\leqslant\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{n_k}\|x_{n_k}-x\|=0,\forall x\in C$$

另一方面,由 Q 是 Y 的非空闭凸子集知$y_{n_k}=Ax_{n_k}\to A\bar{x}\in Q$。记$\bar{y}=A\bar{x}$,从而考虑当$k\to\infty$时,由式(11)结合 g 的单调性以及 g 关于第二变量的连续性可推得

$$\begin{aligned}g(y,\bar{y})&=\lim_{k\to\infty}g(y,y_{n_k})\leqslant-\lim_{k\to\infty}g(y_{n_k},y)\\&\leqslant\lim_{k\to\infty}\varepsilon_{n_k}\|y_{n_k}-y\|=0,\forall y\in Q\end{aligned}$$

再由引理 1 可知$f(\bar{x},x)\geqslant 0,\forall x\in C$,且$\bar{y}=A\bar{x}\in Q$满足$g(\bar{y},y)\geqslant 0,\forall y\in Q$. 因此 $\bar{x}$ 为 SEP 的解。又因 SEP 的解唯一可知$\bar{x}=x^*$,故 SEP 是适定的。

4　结束语

通过对分裂平衡问题适定性的研究,可以促进变

分问题适定性理论的进一步成熟与完善。本文主要引入分裂平衡问题适定性的相关概念,通过研究近似解集的渐进行为以及近似解集与解集之间的关系建立分裂平衡问题适定性的距离刻画,并在适当的条件下获得分裂平衡问题解的存在唯一性与适定性的等价关系。这些结果在分裂平衡问题算法的收敛性分析中起着重要的作用。

参考文献:

[1] Tykhonov A N. On the stability of the functional optimization problem[J]. USSR J. Comput. Math. Math. Phys,1966,6:631-634.

[2] Levitin E S,Polyak B T. Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems [J]. Sov. Math. Dokl,1966,7:764-767.

[3] Furi M,Vignoli A. About well-posed optimization problems for functionals in metric spaces[J]. J. Optim. Theory Appl,1970,5(3):225-229.

[4] Zolezzi T. Well-posedness criteria in optimization with application to the calculus of variations[J]. Nonlinear Anal. TMA,1995,25:437-453.

[5] Zolezzi T. Extended well-posedness of optimization problems[J]. J. Optim. Theory Appl,1996,91:257-266.

[6] Konsulova A S,Revalski J P. Constrained convex optimization problems well-posedness and stability[J]. Numer. Funct. Anal. Optim,1994,15:889-907.

[7] Huang XX,Yang X Q. Generalized Levitin-polyak well-posedness in constrained optimization[J]. SIAM J. Optim,2006,17(1):243-258.

[8] Dontchev A L,Zolezzi T. Well-Posed Optimization Problems[M]. Berlin:Springer-verlag,1993.

[9] Zolezzi T. Well-posedness and optimization under perturbations[J]. Ann. Oper. Res,2001,101:351-361.

[10] Lucchetti R. Convexity and Well-Posed Problems [M]. New York:Springer,2006.

[11] Hu R,Fang Y P,Huang N J. Levitin-Polyak well-posedness for variational inequalities and for optimization problems with variational inequality constraints[J]. J. Ind. Manag. Optim,2010,6(3):465-481.

[12] Lucchetti R,Patrone F. A characterization of Tyhonov well-posedness for minimum problems,with applications to variational inequalities[J]. Numer. Funct. Anal. Optim,1981,3(4):461-476.

[13] Lucchetti R,Patrone F. Some properties of “well-posed” variational inequalities governed by linear operators[J]. Numer. Funct. Anal. Optim,1982/83,5(3):349-361.

[14] Lignola M B,Morgan J. Well-posedness for optimization problems with constraints defined by variational inequalities having a unique solution[J]. J. Glob. Optim. 2000,16(1):57-67.

[15] Cavazzuti E,Morgan J. Well-posed saddle point problems. In:J. B. ,Hirriart Urruty,W. Oettli,J. Stoer,(eds.)Optimization,Theory and Algorithms [M]. New York:Marcel Dekker,1983:61-76.

[16] Margiocco M,Patrone F,Pusillo L. A new approach to Tikhonov well posedness for Nash equilibria[J]. Optimization,1997,40(4):385-400.

[17] Lignola M B,Morgan J. α-well-posedness for Nash equilibria and for optimization problems with Nash equilibrium constraints[J]. J. Glob. Optim. 2006,36(3):439-459.

[18] Fang Y P,Huang N J,Yao J C. Well-posedness of mixed variational inequalities,inclusion problems and fixed point problems[J]. J. Glob. Optim,2008,41:117-133.

[19] Huang XX,Yang X Q,Zhu D L. Levitin-Polyak well-posedness of variational inequality problems with functional constraints[J]. J. Glob. Optim,2009,44:159-174.

[20] Hu R,Fang Y P. Levitin-Polyak well-posedness of variational inequalities [J]. Nonlinear Anal. TMA,2010,72:373-381.

[21] Li X B,Xia F Q. Levitin-Polyak well-posedness of a generalized mixed variational inequality in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal. TMA,2012,75(4):2139-2153.

[22] Hu R,Fang Y P,Huang N J. Well-posedness for equilibrium problems and for optimization problems with equilibrium constraints[J]. Comput. Math. Appl,2008,55(1):89-100.

[23] Long X J,Huang N J,Teo K L. Levitin-Polyak well-posedness for equilibrium problems with functional constraints[J]. J. Inequal,2008,2008:14.

[24] Bianchi M,Kassay G,Pini R. Well-posed equilibrium problems[J]. Nonlinear Anal. TMA,2010,72(1):460-468.

[25] Xie T,Li X S. Well-posedness of second order

differential mixed inverse quasivariational inequalities[J]. Comm. Appl. Nonlinear Anal,2020, 27:33-48.

[26] Censor Y, Gibali A, Reich S. Algorithms for the split variational inequality problem[J]. Numer. Algorithms,2012,59:301-323.

[27] Hu R, Fang Y P. Characterizations of Levitin-Polyak well-posedness by perturbations for the split variational inequality problem[J]. Optimization,2016,65(9):1717-1732.

[28] Hu R, Liu Y K, Fang Y P. Levitin-Polyak well-posedness by perturbations of split minimization problems[J]. J. Fixed Point Theory Appl,2017, 19:2209-2223.

[29] 高友. Banach 空间中分离平衡问题的 Levitin-Polyak-α 适定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2014,37(4):455-459.

[30] Kuratowski K. Topology, Vols 1 and 2[M]. New York:Academic Press,1968.

[31] Klein E,Thompson A C. Theory of Correspondences[M]. New York:John Wiley & Sons,Inc,1984.

Levitin-Polyak Well-posedness for Split Equilibrium Problem

WANG Rui,　HU Rong

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225,China)

Abstract:In this paper, we study the Levitin-Polyak well-posedness (in the sense of Lucchetti and patrone) of the split equilibrium problem in Banach space. Firstly, the concepts of the well-posedness of split equilibrium problems in the sense of Lucchetti and patrone and the well-posedness of Levitin-Polyak type are given respectively. Then, with the help of the asymptotic behavior of the approximate solution set of the split equilibrium problem and the relationship between the approximate solution set and the solution set, the distance characterization of the split equilibrium problem is established in the sense of Levitin-Polyak type well-posed Furi-Vignoli type in the sense of Lucchetti and patrone. Finally, we prove that under suitable conditions, the well-posedness of the split equilibrium problem is equivalent to the existence and uniqueness of its solution.

Keywords:split equilibrium problem;Levitin-Polyak well-posedness;approximating solution set;metric characterization;existence and uniqueness of solution