文章编号：2096-1618(2022)06-0727-03

有界格上一致模的构造

蒋玉秀，郑　旭
(成都信息工程大学应用数学学院，四川 成都 610225)

摘要：一致模的构造是研究一致模需要解决的首要问题。提出两种利用闭包算子(内部算子)和三角次模(三角次余模)在有界格上关于一致模的具体构造方法，得到有界格上基于闭包算子(内部算子)和三角次模(三角次余模)的两类一致模结构。

关　键　词：一致模；有界格；闭包算子；三角次模
中图分类号：O159　　**文献标志码**：A
doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2022.06.017

0　引言

Yager 等[1]在 1996 年提出了单位区间上的一致模算子。单位区间上的一致模算子作为三角模[2]与三角余模的推广和一致化，具有很多良好的性质，被广泛地应用于信息聚合、模糊系统模型、神经网络等领域[3-5]，具有十分重要的理论和应用价值。

由于有界格[6]比单位区间更具一般性，因此都倾向于研究有界格上的一致模[7-21]。Karaçal 等[7]第一次提出有界格上的一致模，还证明了有界格上一致模的存在性。随后，Çaylı 等[12-13,15]构造了有界格上的幂等一致模。Ouyang 等[16]首次引进有界格上的闭包算子(内部算子)构造一致模。Çaylı 等[17-18]也给出了一些在有界格上用闭包算子(内部算子)构造一致模的方法。Ji[19]首次引进有界格上的三角次模(三角次余模)构造一致模。Hua 等[20-21]也给出了一些在有界格上用三角次模(三角次余模)构造一致模的方法。一致模的构造是研究一致模需要解决的首要问题。关于一致模的构造已经有很多的结果，但是目前还没有同时基于闭包算子(内部算子)和三角次模(三角次余模)的一致模结构。本文将利用有界格上的闭包算子(内部算子)和三角次模(三角次余模)给出一致模的两种具体构造方法。

1　预备知识

定义 1[6]　设$(L,\leqslant)$是偏序集，如果 L 中的任意一对元 a 和 b，$a\wedge b$ 与 $a\vee b$ 恒存在，则称$(L,\leqslant)$为格。若格$(L,\leqslant)$存在最大元 1 和最小元 0，则称$(L,\leqslant)$为有界格。

收稿日期：2021-11-21

文中除非特别说明，都定义 L 为有最大元 1 和最小元 0 的有界格。

定义 2[6]　设 L 是一个有界格，$a,b\in L$ 且 $a\leqslant b$。L 的一个子集$[a,b]$被定义为

$$[a,b]=\{x\in L\mid a\leqslant x\leqslant b\} \tag{1}$$

同样可以定义$[a,b)=\{x\in L\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\in L\mid a<x\leqslant b\}$和$(a,b)=\{x\in L\mid a<x<b\}$。如果 a 和 b 无法比较大小，记为 $a\parallel b$。对 $e\in L\backslash\{0,1\}$，定义 $I_e=\{x\in L\mid x\parallel e\}$。

定义 3[2]　设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格。

(1)算子 $T:L^2\to L$ 叫作 L 上的三角模，如果满足交换性、结合性且对于每个变量是单调递增的，并且它有单位元 1，$\forall x\in L$ 都有 $T(x,1)=x$。

(2)算子 $S:L^2\to L$ 叫作 L 上的三角余模，如果满足交换性、结合性且对于每个变量是单调递增的，并且它有单位元 0，$\forall x\in L$ 都有 $S(x,0)=x$。

定义 4[7]　设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格。算子 $U:L^2\to L$ 叫作 L 上的一致模，如果满足交换性、结合性且对于每个变量是单调递增的，并且它有单位元 $e\in L$，$\forall x\in L$ 都有 $U(x,e)=x$。

定理 1[7]　设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格，U 是 L 上的一致模，其单位元 $e\in L\backslash\{0,1\}$，可以得到：

(1)$T_e=U\mid[0,e]^2:[0,e]^2\to[0,e]$是$[0,e]$的一个三角模；

(2)$S_e=U\mid[e,1]^2:[e,1]^2\to[e,1]$是$[e,1]$的一个三角余模。

定义 5[2]　设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格。

(1)算子 $F:L^2\to L$ 叫作 L 上的三角次模，如果满足交换性、结合性且对于每个变量是单调递增的，并且 $\forall x,y\in L$ 都有 $F(x,y)\leqslant x\wedge y$。

(2)算子 $R:L^2\to L$ 叫作 L 上的三角次余模,如果满足交换性、结合性且对于每个变量是单调递增的,并且 $\forall x,y\in L$ 都有 $R(x,y)\geqslant x\vee y$。

定义 6[22] 设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格。

(1)映射 $cl:L\to L$ 叫作闭包算子,如果 $\forall x,y\in L$,都满足以下条件:

(i)$x\leqslant cl(x)$;

(ii)$cl(x\vee y)=cl(x)\vee cl(y)$;

(iii)$cl(cl(x))=cl(x)$。

(2)映射 $\mathrm{int}:L\to L$ 叫作内部算子,如果 $\forall x,y\in L$,都满足以下条件:

(i)$\mathrm{int}(x)\leqslant x$;

(ii)$\mathrm{int}(x\wedge y)=\mathrm{int}(x)\wedge\mathrm{int}(y)$;

(iii)$\mathrm{int}(\mathrm{int}(x))=\mathrm{int}(x)$。

定理 2[19] 设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格并且 $e\in L\backslash\{0,1\}$。

(1)如果 F 是一个 L 上的三角次模且 S_e 是$[e,1]$上的三角余模,则算子 $U:L\times L\to L$ 是 L 上的一个单位元为 e 的一致模,其中 U 定义如下:

$$U(x,y)=\begin{cases}S_e(x,y) & (x,y)\in[e,1]^2\\ x\wedge y & (x,y)\in[0,e)\times[e,1]\cup[e,1]\times[0,e)\\ y & (x,y)\in[e,1]\times I_e\\ x & (x,y)\in I_e\times[e,1]\\ F(x,y) & \text{其他}\end{cases}\tag{2}$$

(2)如果 R 是一个 L 上的三角次余模且 T_e 是$[0,e]$上的三角模,则算子 $U:L\times L\to L$ 是 L 上的一个单位元为 e 的一致模,其中 U 定义如下:

$$U(x,y)=\begin{cases}T_e(x,y) & (x,y)\in[0,e]^2\\ x\vee y & (x,y)\in[0,e]\times(e,1]\cup(e,1]\times[0,e]\\ y & (x,y)\in[0,e]\times I_e\\ x & (x,y)\in I_e\times[0,e]\\ R(x,y) & \text{其他}\end{cases}\tag{3}$$

2 有界格上一致模的构造

利用闭包算子(内部算子)和三角次模(三角次余模)在有界格上给出一致模的两种具体构造方法。

定理 3 设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格并且 $e\in L\backslash\{0,1\}$。如果 F 是一个 L 上的三角次模且 cl 是 L 上的闭包算子,则算子 $U_1:L\times L\to L$ 是 L 上的一个单位元为 e 的一致模,其中 U_1 定义如下:

$$U_1(x,y)=\begin{cases}cl(x)\vee cl(y) & (x,y)\in(e,1]^2\\ x\vee y & (x,y)\in\{e\}\times[e,1]\cup[e,1]\times\{e\}\\ x\wedge y & (x,y)\in[0,e)\times[e,1]\cup[e,1]\times[0,e)\\ y & (x,y)\in[e,1]\times I_e\\ x & (x,y)\in I_e\times[e,1]\\ F(x,y) & \text{其他}\end{cases}\tag{4}$$

证明:结合定理 2 中式(2),要证明 U_1 是 L 上的一个单位元为 e 的一致模,只需验证 $S_e=\begin{cases}cl(x)\vee cl(y) & (x,y)\in(e,1]^2\\ x\vee y & (x,y)\in\{e\}\times[e,1]\cup[e,1]\times\{e\}\end{cases}$ 是$[e,1]$上的三角余模即可。

单位元:$\forall x\in[e,1]$,都有 $S_e(x,e)=x\vee e=x$。

单调性:设 $x\leqslant y$,$\forall z\in L$ 都有 $S_e(x,z)\leqslant S_e(y,z)$。

当 $x=e,y=e,z=e$ 时,$S_e(x,z)=e=S_e(y,z)$;

当 $x=e,y=e,z\in(e,1]$时,$S_e(x,z)=z=S_e(y,z)$;

当 $x=e,y\in(e,1],z=e$ 时,$S_e(x,z)=e<y=S_e(y,z)$;

当 $x=e,y\in(e,1],z=e$ 时,$S_e(x,z)=z\leqslant cl(y)\vee cl(z)=S_e(y,z)$;

当 $x\in(e,1],y\in(e,1],z=e$ 时,$S_e(x,z)=x\leqslant y=S_e(y,z)$;

当 $x\in(e,1],y\in(e,1],z\in(e,1]$时,$S_e(x,z)=cl(x)\vee cl(z)\leqslant cl(y)\vee cl(z)=S_e(y,z)$。

结合性:当 $x,y,z\in[e,1]$三者至少有一个取 e 时,必有 $S_e(x,S_e(y,z))=S_e(S_e(x,y),z)$;当 $x,y,z\in(e,1]$时,有 $S_e(x,S_e(y,z))=cl(x)\vee cl(y)\vee cl(z)=S_e(S_e(x,y),z)$。

交换性显然成立,故:

$S_e=\begin{cases}cl(x)\vee cl(y) & (x,y)\in(e,1]^2\\ x\vee y & (x,y)\in\{e\}\times[e,1]\cup[e,1]\times\{e\}\end{cases}$ 是$[e,1]$上的一个三角余模。因此 U_1 是 L 上的一个单位元为 e 的一致模。

定理4 设$(L,\leqslant,0,1)$是一个有界格并且 $e\in L\backslash\{0,1\}$。如果 R 是一个 L 上的三角次余模且 int 是 L 上的内部算子,则算子 $U_2:L\times L\to L$ 是 L 上的一个单位元为 e 的一致模,其中 U_2 定义如下:

$$U_2(x,y)=\begin{cases}\mathrm{int}(x)\wedge\mathrm{int}(y) & (x,y)\in[0,e)^2\\ x\wedge y & (x,y)\in\{e\}\times[0,e]\cup\{e\}\times[0,e]\\ x\vee y & (x,y)\in[0,e]\times(e,1]\cup(e,1]\times[0,e]\\ y & (x,y)\in[0,e]\times I_e\\ x & (x,y)\in I_e\times[0,e]\\ R(x,y) & \text{其他}\end{cases}\tag{5}$$

证明:此证明与定理 3 的证明类似。

3　结束语

利用闭包算子(内部算子)和三角次模(三角次余模)在有界格上给出一致模的一个构造方法,即利用闭包算子和内部算子分别给出定理2 中的三角模和三角余模的具体形式构造一致模。接下来将继续利用闭包算子(内部算子)或者三角次模(三角次余模)在有界格上构造新的一致模,以此丰富有界格上一致模的结构。

参考文献:

[1] Yager R R,Rybalov A. Uninorm aggregation operators[J]. Fuzzy sets and systems,1996,80(1):111-120.

[2] Klement E P,Mesiar R,Pap E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties[J]. Fuzzy sets and systems,2004,143(1):5-26.

[3] Baets B D,Fodor J V. Melle´s combining function in MYCIN is a representable uninorm:an alternative proof[J]. Fuzzy Sets and Systems,1999,104(1):133-136.

[4] Grabisch M,Marichal J L,Mesiar R,Pap E. Aggregation functions: construction methods, conjunctive,disjunctive and mixed classes[J]. Information Sciences,2011,181(1):23-43.

[5] Pedrycz W,Hirota K. Uninorm-based logic neurons as adaptive and interpretable processing constructs[J]. Soft Computing,2007,11(1):41-52.

[6] Birkhoff G. Lattice theory[M]. the United States of America:American Mathematical Soc,1940:6-10.

[7] Karaçal F,Mesiar R. Uninorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems,2015,261:33-43.

[8] Bodjanova S,Kalina M. Construction of uninorms on bounded lattices[C]. International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, IEEE,2014:61-66.

[9] Çaylı G D,Karaçal F. Construction of uninorms on bounded lattices[J]. Kybernetika,2017,53(3):394-417.

[10] Çaylı G D. On the structure of uninorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems,2019,357:2-26.

[11] Xie A F,Li S J. On constructing the largest and smallest uninorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems,2020,386:95-104.

[12] Çaylı G D. Uninorms on bounded lattices with the underlying t-norms and t-conorms[J]. Fuzzy Sets and Systems,2020,395:107-129.

[13] Dan Y X,Hu Q B,Qiao J S. New constructions of uninorms on bounded lattices[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2019,110:185-209.

[14] Dan Y X,Hu Q B. A new structure for uninorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems,2020,386:77-94.

[15] Aşıcı E,Mesiar R. On the construction of uninorms on bounded lattices[J]. Fuzzy Sets and Systems,2021,408:65-85.

[16] Ouyang Y,Zhang H P. Constructing uninorms via closure operators on a bounded lattice[J]. Fuzzy Sets and Systems,2020,395:93-106.

[17] Çaylı G D. New construction approaches of uninorms on bounded lattices[J]. International Journal of General Systems,2021,50(2):139-158.

[18] Zhao B,Wu T. Some further results about uninorms on bounded lattices[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2021,130:22-49.

[19] Ji W. Constructions of uninorms on bounded lattices by means of t-subnorms and t-subconorms[J]. Fuzzy Sets and Systems,2021,403:38-55.

[20] Hua XJ,Ji W. Uninorms on bounded lattices constructed by t-norms and t-subconorms[J]. Fuzzy Sets and Systems,2020,427:109-131.

[21] Zhang H P,Wu M,Wang Z,et al. A characterization of the classes Umin and Umax of uninorms on a bounded lattice[J]. Fuzzy Sets and Systems,2021,423:107-121.

[22] Everett C. Closure operators and Galois theory in lattices[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1944,55(3):514-525.

Constructions of Uninorms on Bounded Lattices

JIANG Yuxiu,　ZHENG Xu

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology,Chengdu 610225,China)

Abstract: One of the most important questions of uninorms is construction. This paper presents two concrete methods to construct uninorms via closure operators(interior operators) and t-subnorms(t-subconorms) on bounded lattices,then gets two constructions of uninorms on bounded latticesvia closure operators(interior operators) and t-subnorms(t-subconorms).

Keywords: uninorm; bounded lattice; closure operator; t-subnorm