文章编号：2096-1618(2022)06-0730-07

具有线性记忆项 Plate 方程周期解的存在性

张铁元， 杜先云
（成都信息工程大学应用数学学院，四川 成都 610225）

摘要：考虑一类具有线性记忆项的二维 plate 方程在有界域上周期解的存在性。应用 Leray-Schauder 不动点定理验证具有线性记忆项 plate 方程近似周期解的存在，再在其工作空间内验证近似周期解的收敛性，从而得到具有线性记忆项 plate 方程周期解的存在性。

关 键 词：记忆项；plate 方程；周期解；应用数学；无穷维动力系统
中图分类号：O175.29 **文献标志码**：A
doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2022.06.018

0 引言

周期现象在自然界中十分常见，如四季的更替，太阳的升降等，主要表现在某种现象随着时间的推移呈规律性出现，而这些周期现象反应在描述物理现象的非线性偏微分方程中便是周期解的存在。1997 年 H Kato[1]探究了 Navier-Stokes 方程在有界域上周期解的存在性；2001 年郭柏灵等[2]证明了弱阻尼 Schrödinger-Boussinesq 方程周期解的存在性；2019 年罗维[3]讨论了大气原始方程组时间周期解的存在性。

Plate 方程源自 Woinowsky[4]和 Berger[5]建立的弹性振动方程。本文考虑一类具有线性记忆项的二维 plate 方程[6]在周期性外力项的作用下，在有界域 $\Omega\times R^{+}$上周期解的存在性问题。

$$\rho u_{tt}+r_1r_2u_t+\phi(0)\Delta^2u-(N_1+\beta\|u_x\|^2)u_{xx}-(N_2+\beta\|u_y\|^2)u_{yy}+\int_0^\infty\phi'(s)\Delta^2u(t-s)\mathrm{d}s=r_1f(x,y,t) \tag{1}$$

$$u,\phi(t+T)=u,\phi(t) \tag{2}$$

其中：$r_1,r_2,N_1,N_2,\rho,\beta$ 为非负常数，f 为外力项，$\phi(0),\phi(\infty)>0,\phi'(s)<0,\forall s\in R^{+}$。

1 预备知识

介绍一些周期为 T 的函数所构成的函数空间。

令 X 是巴拿赫空间，定义空间 $C^k(T;X)$是在 R 中以 T 为周期的函数的 k 阶导在 X 中连续的集合，定义范数 $|Q|_{C^k(T;X)}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\{\sum\limits_{i=0}^{k}|D_t^iQ(t)|_X\}$。

$L^p(T;X)(1\leqslant p\leqslant\infty)$是在 R^1 中以 T 为周期且在 X 上可测的函数的集合，定义范数

$$|Q|_{L^p(T;X)}=\left(\int_0^T|Q|_X^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty,(1\leqslant p\leqslant\infty)$$

$$|Q|_{L^\infty(T;X)}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Q|_X<+\infty$$

$W^{k,p}(T;X)=\{Q(x)\mid Q(x)\in L^p(T,X),D^\alpha u\in L^p(T,X),x\in R^1,\alpha\leqslant k\}$，当 X 是希尔伯特空间时，$H^k(T;X)=W^{k,2}(T;X)$。

文中记 $H=L^2(\Omega)$，$V=H_0^2(\Omega)$，用$(\cdot,\cdot)$，$((\cdot,\cdot))$分别表示其内积，$\|\cdot,\cdot\|$，$\|\cdot,\cdot\|_{H^2}$分别为其范数，用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(R^2)$的范数。其中$(u,v)=\int_\Omega u(x,y)v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$((u,v))=\int_\Omega\Delta u(x,y)\Delta v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，定义 $D(A)=\{v\in V,Av\in H\}$，其中 $A=\Delta^2$ 对其算子 A 假设：$D(A)\to H$ 为同构，存在 $\alpha>0$，对于所有的$u\in V$，使$(Au,u)\geqslant\alpha\|u\|_{H^2}^2$。运用庞加莱不等式有：$\|v\|_{H^2}\geqslant\lambda_1\|v\|$，$\forall v\in V$，其中 λ_1 为 $A^{1/2}$的第一特征值。

对记忆核函数 μ 作出如下假设：

$(H1)$ $\mu\in C^1(R^+)\cap L^1(R^+)$，$\mu'(s)\leqslant0$，对于任意$s\in R^+$；

$(H2)$ $\int_0^\infty\mu(s)\mathrm{d}s=M>0$；

$(H3)$ $\mu'(s)+\alpha\mu'(s)\leqslant0$，对于任意 $s\in R^+$，$\alpha>0$

关于记忆核 μ 引入如下加权希尔伯特空间，$L_\mu^2(R^+,H_0^2)$由定义在 R^+上的 H_0^2 函数组成的希尔伯特空间。内积与范数定义如下：

$$(\phi,\psi)_{\mu,V}=\int_0^\infty\mu(s)(\Delta\phi(s),\Delta\psi(s))\mathrm{d}s$$

$$\|\phi\|_{\mu,V}^2=(\phi,\phi)_{\mu,V}=\int_0^\infty\mu(s)\|\phi\|_{H^2}^2\mathrm{d}s$$

定义以下希尔伯特空间

$$E_0=V\times H\times L_\mu^2(R^+,V),E_1=D(A)\times V\times L_\mu^2(R^+,D(A))$$

为方便记忆项的处理，不失一般性，设有 $\phi(\infty)=1$，让$\mu(s)=-\phi'(s)$，定义如下变换

$$\eta(x,y,s)=u(x,y,t)-u(x,y,t-s)$$

收稿日期：2021-11-17

并引入变量 $v=u_t+\delta u$，则可将式(1)～(2)转变为下问题：

$$\rho(v_t+\delta^2 u-\delta v)+r_1 r_2(v-\delta u)+\Delta^2 u-(N_1+\beta\|u_x\|^2)u_{xx}-(N_2+\beta\|u_y\|^2)u_{yy}+\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta\mathrm{d}s=r_1 f(x,y,t) \tag{3}$$

$$v=u_t+\delta u \tag{4}$$

$$\eta_t+\eta_s=u_t \tag{5}$$

$$u,v,\eta(t+T,x,y)=u,v,\eta(t,x,y) \tag{6}$$

关于特定的周期性外力项 f，其周期为 T，并满足如下条件：

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(x,y,t)\|\leqslant K_1 \tag{7}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|A^r f(x,y,t)\|\leqslant K_2 \tag{8}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|Af_t(x,y,t)\|\leqslant K_3 \tag{9}$$

其中，$r=\dfrac{N}{4}-\dfrac{1}{2}$。

在开始近似解的估计前，先介绍以下引理。

引理 1[7]　Gronwall's 引理。

设 $u(t)$，$h(t)$ 和 $g(t)$ 是 $[t_0,+\infty]$ 上的 3 个局部可积函数，如果满足微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\gamma u(t)\leqslant h(t)$，

则对 $\gamma\geqslant 0$，有

$$u(t)\leqslant \exp(-\gamma(t_1-t_0))u(t_0)+\int_0^t \exp(-\gamma(t-s))h(s)\mathrm{d}s。$$

引理 2[8]　(Leray-Schauder 不动点定理) 设 $A:E\to E$ 全连续。如果 $\{x\mid x\in E,x=\lambda Ax,0<\lambda<1\}$ 有界，则 A 在 E 闭球 T 中必有不动点，这里 $T=\{x\mid x\in E,\|x\|\leqslant R\}$，$R=\sup\{\|x\|\mid x=\lambda Ax,0<\lambda<1\}$。

2　近似解的存在性

设 $\omega_j(j=1,2,3,\cdots)$ 是由 A 的特征向量组成的 E_0 中的完全正交系，并且具有狄利克雷边界条件。将式(3)～(6)近似周期解 u_N,v_N,η_N 记作以下形式：

$$u_N(x,y,t)=\sum_{j=1}^N a_{jN}(t)\omega_j(x,y),\ v_N(x,y,t)=\sum_{j=1}^N b_{jN}(t)\omega_j(x,y),$$
$$\eta_N(x,y,t)=\sum_{j=1}^N c_{jN}(t)\omega_j(x,y)$$

其中 $a_{jN}(t)$，$b_{jN}(t)$，$c_{jN}(t)$ 是关于时间 $t\in R^+$ 的相关系数函数，根据伽辽金法(Galerkin method)，其满足以下偏微分方程组

$$(\rho(v_{Nt}+\delta^2 u_N-\delta v_N)+r_1 r_2(v_N-\delta u_N)+\Delta^2 u_N-(N_1+\beta\|u_{Nx}\|^2)u_{Nxx}-(N_2+\beta\|u_{Ny}\|^2)u_{Nyy}+\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta_N\mathrm{d}s,\omega_j)=(r_1 f(x,y,t),\omega_j) \tag{10}$$

$$(v_N,\omega_j)=(u_{Nt}+\delta u_N,\omega_j) \tag{11}$$

$$(\eta_{Nt}+\eta_{Ns},\omega_j)=(u_{Nt},\omega_j) \tag{12}$$

$$(u_N,v_N,\eta_N)(t,x,y)=(u_N,v_N,\eta_N)(t+T,x,y) \tag{13}$$

令 W_N 为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 张成的 E_0 的子空间，易知对于 $C^1(T,W_N)$ 中的连续紧映射：$F:(p_N,q_N,m_N)\to(u_N,v_N,\eta_N)$ 有任意 $(p_N,q_N,m_N)\in C^1(T,W_N)$，存在唯一周期为 T 的解 $(u_N,v_N,\eta_N)\in C^1(T,W_N)$ 满足

$$(\rho v_{Nt}+\Delta^2 u_N-(N_1+\beta\|u_{Nx}\|^2)u_{Nxx}-(N_2+\beta\|u_{Ny}\|^2)u_{Nyy},\omega_j)=(r_1 f(x,y,t)+\delta(r_1 r_2-\rho\delta)p_N+(\rho\delta-r_1 r_2)q_N-\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2 m_N\mathrm{d}s,\omega_j) \tag{14}$$

要证明式(10)～(13)解的存在性，由 Leray-Schauder 不动点定理可知，用 $\lambda\beta|u_{Nx}|^2 u_{Nxx}$，$\lambda\beta|u_{Ny}|^2 u_{Nyy}$，$\lambda\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta_N\mathrm{d}s(0<\lambda<1)$ 替换非线性项 $\beta\|u_{Nx}\|^2 u_{Nxx}$，$\beta\|u_{Ny}\|^2 u_{Nyy}$，$\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta_N\mathrm{d}s$ 后，只需证明

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|u_N(t)\|_{H^2}+\|v_N(t)\|+\|\eta_N(t)\|_{\mu,V}\}\leqslant C_1 \tag{15}$$

其中 C_1 是与 λ，N 无关的正常数。

定理 1　若有 $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|u_N(t)\|_{H^2}+\|v_N(t)\|+\|\eta_N(t)\|_{\mu,V}\}\leqslant C_1$，则式(3)～(6)在 E_0 中存在近似周期解 (u_N,v_N,η_N)。

证明　对式(10)与 $b_{jN}(t)$ 作乘法，再对 $(j=1,2,3,\cdots)$ 求和，即

$$(\rho(v_{Nt}+\delta^2 u_N-\delta v_N)+r_1 r_2(v_N-\delta u_N)+\Delta^2 u_N-(N_1+\beta\|u_{Nx}\|^2)u_{Nxx}-(N_2+\beta\|u_{Ny}\|^2)u_{Nyy}+\int_0^\infty \mu(s)\Delta^2\eta_N\mathrm{d}s,v_N)=(r_1 f(x,y,t),v_N)。$$

对式(11)与 $a_{jN}(t)$ 作乘法，再对 $(j=1,2,3,\cdots)$ 求和，即 $(v_N,u_N)=(u_{Nt}+\delta u_N,u_N)$。

对式(12)与 $c_{jN}(t)$ 作乘法，再对 $(j=1,2,3,\cdots)$ 求和，即 $(\eta_{Nt}+\eta_{Ns},\eta_N)_{\mu,\nu}=(u_{Nt},\eta_N)_{\mu,\nu}$。

取 $\delta\in(0,\delta_0)$，$\delta_0=\min\left\{\dfrac{r_1 r_2}{3\rho},\dfrac{\lambda_1^2}{2r_1 r_2}\right\}$，联合上三式有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\rho\|v_N\|^2+\|\Delta u_N\|^2+N_1\|u_{Nx}\|^2+N_2\|u_{Ny}\|^2+\frac{\lambda\beta}{2}\|u_{N_x}\|^4+\frac{\lambda\beta}{2}\|u_{N_y}\|^4\right\}+I_1+N_1\delta\|u_{Nx}\|^2+N_2\delta\|u_{Ny}\|^2+\lambda\beta\delta\|u_{Nx}\|^4+\lambda\beta\delta\|u_{Ny}\|^4+(\eta_N,v_N)_{\mu,V}=r_1(f,v_N)$$

其中 $I_1=-\delta\rho\|v_N\|^2+r_1 r_2\|v_N\|^2+\delta\|\Delta u_N\|^2-(r_1 r_2\delta-\delta^2\rho)(u_N,v_N)$。

将 δ 的取值带入计算可得

$$I_1=(r_1 r_2-\delta\rho)\|v_N\|^2+\delta\|\Delta u_N\|^2-(r_1 r_2\delta-\delta^2\rho)(u_N,v_N)\geqslant\left(r_1 r_2-\delta\rho-\frac{r_1 r_2-\delta\rho}{4}\right)\|v_N\|^2+\left(\delta-\delta^2\frac{r_1 r_2-\delta\rho}{\lambda_1^2}\right)\|\Delta u_N\|^2$$

$$\geqslant (r_1r_2-\delta\rho-\frac{r_1r_2-\delta\rho}{4})\ \|v_N\|^2+(\delta-\frac{r_1r_2\delta^2}{\lambda_1^2})\ \|\Delta u_N\|^2$$

$$\geqslant \frac{r_1r_2}{2}\|v_N\|^2+\frac{\delta}{2}\|\Delta u_N\|^2.$$

对于记忆项$(\eta_N,v_N)_{\mu,V}$,有

$$(\eta_N,v_N)_{\mu,V}=(\eta_N,u_{Nt}+\delta u_N)_{\mu,V}=(\eta_N,u_{Nt})_{\mu,V}+\delta\,(\eta_N,u_N)_{\mu,V}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta_N\|^2_{\mu,V}-\frac{1}{2}\int_0^\infty\mu'(s)\|\Delta\eta\|^2\mathrm{d}s+\delta\,(\eta_N,u_N)_{\mu,V}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta_N\|^2_{\mu,V}+\frac{\alpha}{2}\|\eta_N\|^2_{\mu,V}+\delta\,(\eta_N,u_N)_{\mu,V}$$

$$\delta(\eta_N,\eta_{Ns})_{\mu,V}=\delta\int_0^\infty\mu(s)(\Delta\eta_N,\Delta u_N)\mathrm{d}s$$

$$\geqslant -\delta\,(\int_0^\infty\mu(s)\|\Delta\eta_N\|^2\mathrm{d}s)^{1/2}\cdot(\int_0^\infty\mu(s)\|\Delta u_N\|^2\mathrm{d}s)^{1/2}$$

$$\geqslant -\frac{\alpha}{4}\int_0^\infty\mu(s)\ \|\Delta\eta_N\|^2\mathrm{d}s-\frac{\delta^2}{\alpha}\int_0^\infty\mu(s)\ \|\Delta u_N\|^2\mathrm{d}s$$

$$\geqslant -\frac{\alpha}{4}\|\eta_N\|^2_{\mu,V}-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u_N\|^2$$

则对于记忆项有

$$(\eta_N,v_N)_{\mu,V}\geqslant \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta_N\|^2_{\mu,V}+\frac{\alpha}{4}\|\eta_N\|^2_{\mu,V}-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u_N\|^2$$

对于外力项

$$r_1(f,v_N)\leqslant r_1\|f\|\ \|v_N\|\leqslant \frac{r_1}{r_2}\|f\|^2+\frac{r_1r_2}{4}\|v_N\|^2。$$

则综上且由式(7)可有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\rho\|v_N\|^2+\|\Delta u_N\|^2+N_1\|u_{Nx}\|^2+N_2\|u_{Ny}\|^2+\frac{\lambda\beta}{3}\|u_{Nx}\|^4+\frac{\lambda\beta}{3}\|u_{Ny}\|^4+\|\eta_N\|^2_{\mu,V}\Big\}+\frac{r_1r_2}{2}\|v_N\|^2+$$

$$\delta\left(1-\frac{2M\delta}{\alpha}\right)\|\Delta u_N\|^2+\frac{\alpha}{2}\|\eta_N\|^2_{\mu,V}+2N_1\delta\|u_{Nx}\|^2+$$

$$2N_2\delta\|u_{Ny}\|^2 2\lambda\beta\delta\|u_{Nx}\|^4+2\lambda\beta\delta\|u_{Ny}\|^4\leqslant \frac{2r_1}{r_2}\|f\|^2\leqslant \frac{2r_1}{r_2}K_1$$

取合适的δ使$1-\frac{2M\delta}{\alpha}>\frac{1}{4}$,且令$c_0=\min\left\{\frac{\delta}{4},\frac{r_1r_2}{4\rho},\frac{\alpha}{2}\right\}$,

$E(t)=\rho\|v_N\|^2+\|u_N\|^2_{H^2}+N_1\|u_{Nx}\|^2+N_2\|u_{Ny}\|^2+\frac{\lambda\beta}{3}\|u_{Nx}\|^4+\frac{\lambda\beta}{3}\|u_{Ny}\|^4+\|\eta_N\|^2_{\mu,V}$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+c_0E(t)\leqslant \frac{2r_1}{r_2}K_1 \tag{16}$$

在对其积分有

$$c_0\int_0^T E(t)\mathrm{d}t\leqslant \int_0^T\frac{2r_1}{r_2}K_1\mathrm{d}t=\frac{2r_1}{r_2}K_1T$$

即是

$$\int_0^T E(t)\mathrm{d}t\leqslant \frac{2r_1K_1T}{r_2c_0}$$

由第一微分中值定理有,存在$t^*\in[0,T]$,使$E(t*)\leqslant \frac{2r_1K_1}{r_2c_0}$。

结合式(16)对其从t^*到$t+T(t\in[0,T])$,则有

$$\int_{t^*}^{t+T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)\mathrm{d}t+c_0\int_{t^*}^{t+T}E(t)\mathrm{d}t\leqslant \int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1}{r_2}K_1T\mathrm{d}t$$

$$E(t+T)-E(t^*)+c_0\int_{t^*}^{t+T}E(t)\mathrm{d}t\leqslant \int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1}{r_2}K_1T\mathrm{d}t$$

$$E(t)\leqslant \int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1}{r_2}KT\mathrm{d}t+E(t^*)=\frac{4r_1K_1T}{r_2}+\frac{2r_1K_1}{r_2c_0}=C_1$$

从而有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|u_N(t)\|^2_{H^2}+\|v_N(t)\|^2+\|\eta_N(t)\|^2_{\mu,V}+\|u_{Nx}\|^2+\|u_{Ny}\|^2\}\leqslant C_1 \tag{17}$$

其中C_1是与λ,N无关的正常数,则说明式(3)~(6)在E_0中存在近似周期解(u_N,v_N,η_N),定理1证毕。

3 先验估计

定理1中证明了近似周期解(u_N,v_N,η_N)的存在性,为说明(u_N,v_N,η_N)的收敛性,将进行其高低阶导数的一致性有界估计。在开始有关$\{\|A^ru_N(t)\|^2_{H^2}+\|A^rv_N(t)\|^2+\|A^r\eta_N(t)\|^2_{\mu,V}\}$的高阶估计前(其中$r=\frac{N}{4}-\frac{1}{2}$),注意到基$\{\omega_i,i=1,2,3,\cdots\}$既可以作为算子$A$的特征函数$\omega_i$,也可作为$A^r$的特征函数$\omega_i$,表示为$A\omega_i=l_i\omega_i,A^r\omega_i=l_i^r\omega_i$其中$l_i$为算子$A$的特征值。

定理2 (u_N,v_N,η_N)为式(3)~(6)在E_0中的近似周期解,有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|A^ru_N(t)\|^2_{H^2}+\|A^rv_N(t)\|^2+\|A^r\eta_N(t)\|^2_{\mu,V}\}\leqslant C_2。$$

证明 类似前面定理1的做法。

对式(10)与$A^{2r}b_{jN}(t)$作乘法,再对$(j=1,2,3,\cdots)$求和,有:

$$(\rho(v_{Nt}+\delta^2u_N-\delta v_N)+r_1r_2(v_N-\delta u_N)+\Delta^2u_N-(N_1+\beta\|u_{Nx}\|^2)u_{Nxx}-(N_2+\beta\|u_{Ny}\|^2)u_{Nyy}+\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta_N\mathrm{d}s,A^{2r}v_N)=(r_1f(x,y,t),A^{2r}v_N)。$$

对式(11)与$A^{2r}a_{jN}(t)$作乘法,再对$(j=1,2,3,\cdots)$求和,有

$$(v_N,A^{2r}u_N)=(u_{Nt}+\delta u_N,A^{2r}u_N)$$

对式(12)与$A^{2r}c_{jN}(t)$作乘法,再对$(j=1,2,3,\cdots)$求和,有

$$(\eta_{Nt}+\eta_{Ns},A^{2r}\eta_N)_{\mu,\nu}=(u_{Nt},A^{2r}\eta_N)_{\mu,\nu}$$

联合有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\rho\|A^rv_N\|^2+\|A^ru_N\|^2_{H^2}\}+(-N_1u_{Nxx}-\beta\|u_{Nx}\|^2u_{Nxx},A^{2r}v_N)+(-N_2u_{Nyy}-\beta\|u_{Ny}\|^2u_{Nyy},A^{2r}v_N)+(\eta_N,A^{2r}v_N)_{\mu,V}$$

$$+I_2=r_1(f,A^{2r}v_N) \tag{18}$$

其中 $I_2=-\delta\rho\|A^rv_N\|^2+r_1r_2\|A^rv_N\|^2+\delta\|A^ru_N\|_{H^2}^2-(r_1r_2\delta-\delta^2\rho)(A^ru_N,A^rv_N)$。

对于 I_2 有

$$I_2=(r_1r_2-\delta\rho)\|A^rv_N\|^2+\delta\|A^ru_N\|_{H^2}^2-(r_1r_2\delta-\delta^2\rho)(A^ru_N,A^rv_N)$$
$$\geqslant\left(r_1r_2-\delta\rho-\frac{r_1r_2-\delta\rho}{4}\right)\|A^rv_N\|^2+\left(\delta-\delta^2\frac{r_1r_2-\delta\rho}{\lambda_1^2}\right)\|A^ru_N\|_{H^2}^2$$
$$\geqslant\left(\frac{3(r_1r_2-\delta\rho)}{4}\right)\|A^rv_N\|^2+\left(\delta-\frac{r_1r_2\delta^2}{\lambda_1^2}\right)\|A^ru_N\|_{H^2}^2$$
$$\geqslant\frac{r_1r_2}{2}\|A^rv_N\|^2+\frac{\delta}{2}\|A^ru_N\|_{H^2}^2。$$

对于式(18)等号左边第二、三项,并且由式(17)可有

$$(-(N_1+\beta\|u_{Nx}\|^2)u_{Nxx},A^{2r}v_N)\geqslant(-(N_1+\beta C_1)u_{Nxx},A^{2r}v_N)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_1+\beta C_1)\|A^ru_{Nx}\|^2+\delta(N_1+\beta C_1)\|A^ru_{Nx}\|^2$$
$$(-N_2u_{Nyy}-\beta\|u_{Ny}\|^2u_{Nyy},A^{2r}v_N)\geqslant(-(N_2+\beta C_1)u_{Nyy},A^{2r}v_N)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_2+\beta C_1)\|A^ru_{Ny}\|^2+\delta(N_2+\beta C_1)\|A^ru_{Ny}\|^2$$

对于记忆项以及外力项,类似有

$$(\eta_N,A^{2r}v_N)_{\mu,V}\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|A^r\eta_N\|_{\mu,V}^2+\frac{\alpha}{4}\|A^r\eta_N\|_{\mu,V}^2-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|A^ru_N\|_{H^2}^2$$

$$r_1(f,A^{2r}v_N)\leqslant r_1\|A^rf\|\|A^rv_N\|\leqslant\frac{r_1}{r_2}\|A^rf\|^2+\frac{r_1r_2}{4}\|A^rv_N\|^2$$

综上整理有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\rho\|A^rv_N\|^2+\|A^ru_N\|_{H^2}^2+\|A^r\eta_N\|_{\mu,V}^2+(N_1+\beta C_1)\|A^ru_{Nx}\|^2+(N_2+\beta C_1)\|A^ru_{Ny}\|^2\}+\frac{r_1r_2}{2}\|A^rv_N\|^2+\delta\left(1-\frac{M\delta}{2\alpha}\right)\|A^ru_N\|_{H^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|A^r\eta_N\|_{\mu,V}^2+2\delta(N_1+\beta C_1)\|A^ru_{Nx}\|^2+2\delta(N_2+\beta C_1)\|A^ru_{Ny}\|^2\leqslant\frac{2r_1}{r_2}\|A^rf\|^2\leqslant\frac{2r_1}{r_2}K_2$$

取适当的 δ 使 $\frac{1}{2}-\frac{2M\delta}{\alpha}>\frac{1}{4}$,令 $c_0=\min\left\{\frac{\delta}{4},\frac{r_1r_2}{4\rho},\frac{\alpha}{2}\right\}$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)+c_0G(t)\leqslant\frac{2r_1}{r_2}K_2 \tag{19}$$

其中 $G(t)=\rho\|A^rv_N\|^2+\|A^ru_N\|_{H^2}^2+\|A^r\eta_N\|_{\mu,V}^2+(N_1+\beta C_1)\|A^ru_{Nx}\|^2+(N_2+\beta C_1)\|A^ru_{Ny}\|^2$。

对式(19)在 $[0,T]$ 上积分有

$$\int_0^TG(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2r_1T}{r_2c_0}K_2$$

由第一微分中值定理有,存在 $t^*\in[0,T]$,使

$$G(t^*)\leqslant\frac{2r_1}{r_2c_0}K_2$$

再对式(19)从 t^* 到 $t+T(t\in[0,T])$ 上积分有

$$\int_{t^*}^{t+T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t)dt+c_0\int_{t^*}^{t+T}G(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1}{r_2}K_2T\mathrm{d}t$$
$$G(t+T)-G(t^*)+c_0\int_{t^*}^{t+T}G(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1}{r_2}K_2T\mathrm{d}t$$
$$G(t)\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1}{r_2}K_2T\mathrm{d}t+G(t^*)=\frac{4r_1K_2T}{r_2}+\frac{2r_1K_2}{r_2c_0}=C_2$$

从而有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|A^ru_N(t)\|_{H^2}^2+\|A^rv_N(t)\|^2+\|A^r\eta_N(t)\|_{\mu,V}^2\}\leqslant C_2$$

定理 2 证毕。

定理 3　(u_N,v_N,η_N) 为式(3)~(6)在 E_0 中的近似周期解,有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|\Delta u_N(t)\|_{H^2}^2+\|\Delta v_N(t)\|^2+\|\Delta\eta_N(t)\|_{\mu,V}^2\}\leqslant C(K_2) \tag{20}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|u_{Nt}(t)\|_{H^2}^2+\|v_{Nt}(t)\|^2+\|\eta_{Nt}(t)\|_{\mu,V}^2\}\leqslant C(K_3) \tag{21}$$

证明　由定理 2 易知式(20)成立,下面证明式(21)

对式(10)关于时间 t 求偏微分,与 $b_{jN}'(t)$ 作乘法,最后再对 $(j=1,2,3,\cdots)$ 求和有

$$(\rho(v_{Ntt}+\delta^2u_{Nt}-\delta v_{Nt})+r_1r_2(v_{Nt}-\delta u_{Nt})+\Delta^2u_{Nt}-(N_1u_{Nxx}+\beta\|u_{Nx}\|^2u_{Nxx})_t-(N_2u_{Nyy}+\beta\|u_{Ny}\|^2u_{Nyy})_t+\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta_{Nt}\mathrm{d}s,v_{Nt})=(r_1f_t,v_{Nt})$$

从而有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\|v_{Nt}\|^2+\|u_{Nt}\|_{H^2}^2)+(r_1r_2-\delta\rho)\|v_{Nt}\|^2+\delta\|u_{Nt}\|_{H^2}^2-(r_1r_2\delta-\delta^2\rho)(u_{Nt},v_{Nt})+L_1+L_2+(\eta_{Nt},v_{Nt})_{\mu,v}=(r_1f_t,v_{Nt})$$

其中

$$L_1=(-(N_1+\beta\|u_{Nx}\|^2)u_{Ntxx},v_{Nt})+(-(N_2+\beta\|u_{Ny}\|^2)u_{Ntyy},v_{Nt})\geqslant(-(N_1+\beta C_1)u_{Ntxx},v_{Nt})+(-(N_2+\beta C_1)u_{Ntyy},v_{Nt})$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_1+\beta C_1)\|u_{Ntx}\|^2+\delta(N_1+\beta C_1)\|u_{Ntx}\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(N_2+\beta C_1)\|u_{Nty}\|^2+\delta(N_2+\beta C_1)\|u_{Nty}\|^2$$

$$L_2=(-\beta(\|u_{Nx}\|^2)_tu_{Nxx},v_{Nt})+(-\beta(\|u_{Ny}\|^2)_tu_{Nyy},v_{Nt})\geqslant-2\beta\|u_{Nx}\|\|u_{Ntx}\|\|u_{Nxx}\|\|v_{Nt}\|-2\beta\|u_{Ny}\|\|u_{Nty}\|\|u_{Nyy}\|\|v_{Nt}\|\geqslant-\beta C_2\|u_{Ntx}\|\|v_{Nt}\|-\beta C_2\|u_{Nty}\|\|v_{Nt}\|\geqslant-\beta C_2\|\nabla u_{Nt}\|\|v_{Nt}\|$$

由算子正交 $A=\int_\mu^\infty\lambda\mathrm{d}E_\lambda$(其中 $\mu>0$,A 为算子的最小特征值),则有以下不等式:

$$\|A^\alpha u_N\|\leqslant\mu^{\alpha-\beta}\|A^\beta u_N\|\quad(0\leqslant\alpha\leqslant\beta)$$

由上不等式对于 L_2 有

$$L_2\geqslant-\beta C_2\|\nabla u_{Nt}\|\|v_{Nt}\|\geqslant-\beta C_2\mu^{-\frac{1}{4}}\|\Delta u_{Nt}\|\|v_{Nt}\|$$

类似前面的做法对于记忆项以及外力项有：

$$(\eta_{Nt},v_{Nt})_{\mu,V}\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|^2_{\mu,V}+\frac{\alpha}{4}\|\eta\|^2_{\mu,V}-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u\|^2$$

$$r_1(f_t,v_{Nt})\leqslant r_1\|f_t\|\|v_{Nt}\|\leqslant\frac{r_1}{r_2}\|f_t\|^2+\frac{r_1r_2}{4}\|v_{Nt}\|^2。$$

则综上整理有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\|v_{Nt}\|^2+\|u_{Nt}\|^2_{H^2}+\|\eta_t\|^2_{\mu,V}+(N_1+\beta C_1)\|u_{Ntx}\|^2+(N_2+\beta C_1)\|u_{Nty}\|^2)+\frac{\alpha}{4}\|\eta_t\|^2_{\mu,V}+\delta(N_1+\beta C_1)\|u_{Ntx}\|^2+\delta(N_2+\beta C_1)\|u_{Nty}\|^2+L_3\leqslant\frac{r_1}{r_2}\|f_t\|^2+\frac{r_1r_2}{4}\|v_{Nt}\|^2$$

其中，取$\sqrt{2}\leqslant\delta\leqslant\delta_1$，

$$\delta_1=\min\left\{\frac{r_1r_2}{6\rho},\frac{\lambda_1^2\alpha r_1r_2}{2((r_1r_2)^2\alpha+M\lambda_1^2r_1r_2+(\beta C_2\mu^{-\frac{1}{4}})^2\lambda_1^2\alpha)}\right\}$$

则有

$$L_3=(r_1r_2-\delta\rho)\|v_{Nt}\|^2+\delta\|\Delta u_{Nt}\|^2-(r_1r_2\delta-\delta^2\rho)(u_{Nt},v_{Nt})-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u\|^2-\beta C_2\mu^{-\frac{1}{4}}\|\Delta u_{Nt}\|\|v_{Nt}\|$$

$$\geqslant(r_1r_2-\delta\rho-\frac{r_1r_2-\delta\rho}{4})\|v_{Nt}\|^2+(\delta-\delta^2\frac{r_1r_2-\delta\rho}{\lambda_1^2})\|\Delta u_{Nt}\|^2-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u\|^2-\beta C_2\mu^{-\frac{1}{4}}\|\Delta u_{Nt}\|\|v_{Nt}\|$$

$$\geqslant(r_1r_2-\delta\rho-\frac{r_1r_2-\delta\rho}{4}-\frac{r_1r_2}{\delta^2})\|v_{Nt}\|^2+(\delta-\frac{r_1r_2\delta^2}{\lambda_1^2}-\frac{M\delta^2}{\alpha}-\frac{(\beta C_2\mu^{-\frac{1}{4}})^2\delta^2}{r_1r_2})\|\Delta u_{Nt}\|^2\geqslant\frac{3r_1r_2}{8}\|v_{Nt}\|^2+\frac{\delta}{2}\|\Delta u_{Nt}\|^2。$$

将 L_3 带入化简有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\|v_{Nt}\|^2+\|\Delta u_{Nt}\|^2+\|\eta_t\|^2_{\mu,V}+(N_1+\beta C_1)\|u_{Ntx}\|^2+(N_2+\beta C_1)\|u_{Nty}\|^2)+\frac{\alpha}{2}\|\eta_t\|^2_{\mu,V}+2\delta(N_1+\beta C_1)\|u_{Ntx}\|^2+2\delta(N_2+\beta C_1)\|u_{Nty}\|^2+\frac{r_1r_2}{4}\|v_{Nt}\|^2+\delta\|\Delta u_{Nt}\|^2\leqslant\frac{2r_1}{r_2}\|f_t\|^2\leqslant\frac{2r_1}{r_2\mu^2}\|Af_t\|^2\leqslant\frac{2r_1K_3}{r_2\mu^2}$$

取 $c_1=\min\left\{\frac{r_1r_2}{4\rho},\delta,\frac{\alpha}{2}\right\}$

令 $H(t)=\rho\|v_{Nt}\|^2+\|\Delta u_{Nt}\|^2+\|\eta_t\|^2_{\mu,V}+(N_1+\beta C_1)\|u_{Ntx}\|^2+(N_2+\beta C_1)\|u_{Nty}\|^2$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)+c_1H(t)\leqslant\frac{2r_1K_3}{r_2\mu^2}\tag{22}$$

对式(22)从 0 到 T 上积分有

$$\int_0^T H(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2r_1K_3T}{r_2c_1\mu^2}$$

由第一微分中值定理有，存在 $t^*\in[0,T]$，使得

$$H(t^*)\leqslant\frac{2r_1K_3}{r_2c_1\mu^2}$$

再对式(22)从 t^* 到 $t+T(t\in[0,T])$ 上积分有

$$\int_{t^*}^{t+T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(t)\mathrm{d}t+c_1\int_{t^*}^{t+T}H(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1K_3}{r_2\mu^2}\mathrm{d}t$$

$$H(t+T)-H(t^*)+c_1\int_{t^*}^{t+T}H(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1K_3}{r_2\mu^2}\mathrm{d}t$$

$$H(t)\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1K_3}{r_2\mu^2}\mathrm{d}t+H(t^*)\leqslant\int_0^{2T}\frac{2r_1K_3}{r_2\mu^2}\mathrm{d}t+H(t^*)=\frac{4Tr_1K_3}{r_2\mu^2}+\frac{2r_1K_3}{r_2c_1\mu^2}$$

从而有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|u_{Nt}\|^2_{H^2}+\|v_{Nt}\|^2+\|\eta_{Nt}\|^2_{\mu,V}\}\leqslant C(K_3)$$

定理 3 证毕。

定理 4　(u_N,v_N,η_N)为式(3)～(6)在 E_0 中的近似周期解，有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|Au_N(t)\|^2_{H^2}+\|Av_N(t)\|^2+\|A\eta_N(t)\|^2_{\mu,V}\}\leqslant C(K_2)\tag{23}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|\Delta u_{Nt}(t)\|^2_{H^2}+\|\Delta v_{Nt}(t)\|^2+\|\Delta\eta_{Nt}(t)\|^2_{\mu,V}\}\leqslant C(K_3)\tag{24}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|Au_{Nt}(t)\|^2_{H^2}+\|Av_{Nt}(t)\|^2+\|A\eta_{Nt}(t)\|^2_{\mu,V}\}\leqslant C(K_3)\tag{25}$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|u_{Ntt}(t)\|^2_{H^2}+\|v_{Ntt}(t)\|^2+\|\eta_{Ntt}(t)\|^2_{\mu,V}\}\leqslant C(K_2,K_3)\tag{26}$$

证明　由定理 2 易知式(23)成立，先展开式(25)的证明

同定理 3 类似的做法，有

$$(\rho(v_{Ntt}+\delta^2u_{Nt}-\delta v_{Nt})+r_1r_2(v_{Nt}-\delta u_{Nt})+\Delta^2u_{Nt}-(N_1u_{Nxx}+\beta\|u_{Nx}\|^2u_{Nxx})_t-(N_2u_{Nyy}+\beta\|u_{Ny}\|^2u_{Nyy})_t+\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta_{Nt}\mathrm{d}s,A^2v_{Nt})=(r_1f_t,A^2v_{Nt})$$

类似前面的估计有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\|Av_{Nt}\|^2+\|Au_{Nt}\|^2_{H^2}+\|A\eta_t\|^2_{\mu,V}+(N_1+\beta C_1)\|Au_{Ntx}\|^2+(N_2+\beta C_1)\|Au_{Nty}\|^2)+\frac{\alpha}{2}\|A\eta_t\|^2_{\mu,V}+2\delta(N_1+\beta C_1)\|Au_{Ntx}\|^2+2\delta(N_2+\beta C_1)\|Au_{Nty}\|^2+\frac{r_1r_2}{4}\|Av_{Nt}\|^2+\delta\|Au_{Nt}\|^2_{H^2}\leqslant\frac{2r_1}{r_2}\|Af_t\|^2\leqslant\frac{2r_1K_3}{r_2}$$

令 $M(t)=\rho\|Av_{Nt}\|^2+\|Au_{Nt}\|^2_{H^2}+\|A\eta_t\|^2_{\mu,V}+(N_1+\beta C_1)\|Au_{Ntx}\|^2+(N_2+\beta C_1)\|Au_{Nty}\|^2$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(t)+c_1M(t)\leqslant\frac{2r_1K_3}{r_2}\tag{27}$$

对式(27)从 0 到 T 上积分有

$$\int_0^T M(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{2r_1K_3T}{r_2c_1}$$

由第一微分中值定理有，存在 $t^*\in[0,T]$，使

$$M(t^*)\leqslant\frac{2r_1K_3T}{r_2c_1}$$

再对式(27)从 t^* 到 $t+T(t\in[0,T])$ 上积分有

$$\int_{t^*}^{t+T}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M(t)\mathrm{d}t+c_1\int_{t^*}^{t+T}M(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1K_3}{r_2}\mathrm{d}t$$

$$M(t+T)-M(t^*)+c_1\int_{t^*}^{t+T}M(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1K_3}{r_2}\mathrm{d}t$$

$$M(t)\leqslant\int_{t^*}^{t+T}\frac{2r_1K_3}{r_2}\mathrm{d}t+M(t^*)\leqslant\int_0^{2T}\frac{2r_1K_3}{r_2}\mathrm{d}t+M(t^*)=\frac{4Tr_1K_3}{r_2}+\frac{2r_1K_3T}{r_2c_1}$$

从而有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{\|Au_{Nt}\|_{H^2}^2+\|Av_{Nt}\|^2+\|A\eta_{Nt}\|_{\mu,V}^2\}\leqslant C(K_3)$$

即式(25)得证，由式(25)易知式(24)成立，同理可证得式(26)。

4　周期解的存在唯一性

定理 5　式(3)～(6)在 E_0 中存在唯一周期解 (u,v,η)

证明　定理 1 中，证明了式(3)～(6)存在近似周期解 (u_N,v_N,η_N)，则由定理 2 到定理 4 的成立可知，解序列 (u_N,v_N,η_N) 以下面的方式趋近于解序列 (u,v,η)

在 $L_\infty(T;D(A))$ 上，(u_N,v_N,η_N) 弱 * 收敛于 (u,v,η)　　(28)

在 $L_\infty(T;D(A^{1/2}))$ 上，(u_N,v_N,η_N) 强收敛于 (u,v,η)　　(29)

在 $L_\infty(T;D(A^{1/2}))$ 上，$(u_{Nt},v_{Nt},\eta_{Nt})$ 弱 * 收敛于 (u_t,v_t,η_t)　　(30)

在 $L_\infty(T;E_0)$ 上，$(u_{Nt},v_{Nt},\eta_{Nt})$ 强收敛于 (u_t,v_t,η_t)　　(31)

由式(28)～(30)的成立就可以推出式(31)，说明近似周期解 (u_N,v_N,η_N) 在 E_0 中的收敛性。

并且通过上面的定理，当 $N\to\infty$ 时，非线性项也有

$$\|\beta\|u_{Nx}\|^2u_{Nxx}-\beta\|u_x\|^2u_{xx}\|\leqslant\beta\|u_{Nx}\|^2\|(u_N-u)_{xx}\|+\beta\|(u_N-u)_x\|^2\|u_{xx}\|\to0$$

$$\|\beta\|u_{Ny}\|^2u_{Nyy}-\beta\|u_y\|^2u_{yy}\|\leqslant\beta\|u_{Ny}\|^2\|(u_N-u)_{yy}\|+\beta\|(u_N-u)_y\|^2\|u_{yy}\|\to0$$

$$\left\|\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta_N\mathrm{d}s-\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta\mathrm{d}s\right\|\leqslant\left\|\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2(\eta_N-\eta)\mathrm{d}s\right\|\to0$$

因此，可以得到

$$(\rho(v_t+\delta^2u-\delta v)+r_1r_2(v-\delta u)+\Delta^2u-(N_1+\beta\|u_x\|^2)u_{xx}-(N_2+\beta\|u_y\|^2)u_{yy}+\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta\mathrm{d}s,\omega_j)=(r_1f(x,y,t),\omega_j)\tag{32}$$

$$(v,\omega_j)=(u_t+\delta u,\omega_j)\tag{33}$$

$$(\eta_t+\eta_s,\omega_j)=(u_t,\omega_j)\tag{34}$$

则由前面的估计可得

$$\rho(v_t+\delta^2u-\delta v)+r_1r_2(v-\delta u)+\Delta^2u-(N_1+\beta\|u_x\|^2)u_{xx}-(N_2+\beta\|u_y\|^2)u_{yy}+\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta\mathrm{d}s=r_1f(x,y,t)\tag{35}$$

$$v=u_t+\delta u\tag{36}$$

$$\eta_t+\eta_s=u_t\tag{37}$$

$$u,v,\eta(t+T)=u,v,\eta(t)\tag{38}$$

下面说明周期解 (u,v,η) 的唯一性。

设 (u_1,v_1,η_1)，(u_2,v_2,η_2) 都为式(3)～(6)的时间周期解，并且，令 $(u^*,v^*,\eta^*)=(u_1,v_1,\eta_1)-(u_2,v_2,\eta_2)=(u_1-u_2,v_1-v_2,\eta_1-\eta_2)$。

则有

$$\rho(v_t^*+\delta^2u^*-\delta v^*)+r_1r_2(v^*-\delta u^*)+\Delta^2u^*+\int_0^\infty\mu(s)\Delta^2\eta^*\mathrm{d}s+L_3=0\tag{39}$$

其中 $L_3=-(N_1+\beta\|u_{1x}\|^2)u_{1xx}+(N_1+\beta\|u_{2x}\|^2)u_{2xx}-(N_2+\beta\|u_{1y}\|^2)u_{1yy}+(N_2+\beta\|u_{2y}\|^2)u_{2yy}$。

将式(39)与 v^* 作内积

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\rho\|v^*\|^2+\|\Delta u^*\|^2+\|\eta*\|_{\mu,V}^2\}+\frac{r_1r_2}{2}\|v^*\|^2+\frac{\delta}{2}\|\Delta u^*\|^2-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u^*\|^2+\frac{\alpha}{4}\|\eta^*\|_{\mu,V}^2+(L_3,v^*)\leqslant0$$

对于 L_3，有

$$\begin{aligned}L_3=&-(N_1+\beta\|u_{1x}\|^2)u_{1xx}+(N_1+\beta\|u_{2x}\|^2)u_{2xx}+(N_1+\beta\|u_{1x}\|^2)u_{2xx}-(N_1+\beta\|u_{1x}\|^2)u_{2xx}-(N_2+\beta\|u_{1y}\|^2)u_{1yy}+\\&(N_2+\beta\|u_{2y}\|^2)u_{2yy}+(N_2+\beta\|u_{1y}\|^2)u_{2yy}-(N_2+\beta\|u_{1y}\|^2)u_{2yy}\geqslant-(N_1+\beta\|u_{1x}\|^2)u_{xx}^*-\\&u_{2xx}(\beta\|u_x^*\|^2)-(N_2+\beta\|u_{1y}\|^2)u_{yy}^*-u_{2yy}(\beta\|u_y^*\|^2)\geqslant\\&-(N_1+\beta C_1)u_{xx}^*-(N_2+\beta C_1)u_{yy}^*-u_{2xx}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\|\Delta u^*\|^2\right)-u_{2yy}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\|\Delta u^*\|^2\right)\end{aligned}$$

从而

$$(L_3,v^*)\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((N_1+\beta C_1)\|u_x^*\|^2+(N_2+\beta C_1)\|u_y^*\|^2)+\delta(N_1+\beta C_1)\|u_x^*\|^2+\delta(N_2+\beta C_1)\|u_y^*\|^2-\frac{\beta C_1}{\sqrt{\mu}}\|\Delta u^*\|\|v^*\|$$

综合有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\rho\|v^*\|^2+\|\Delta u^*\|^2+\|\eta^*\|_{\mu,V}^2+(N_1+$$

$\beta C_1)\|u_x^*\|^2+(N_2+\beta C_1)\|u_y^*\|^2\}+\frac{\alpha}{4}\|\eta^*\|_{\mu,V}^2+$

$\delta(N_1+\beta C_1)\|u_x^*\|^2+\delta(N_2+\beta C_1)\|u_y^*\|^2+\frac{r_1r_2}{2}\|v^*\|^2+$

$\frac{\delta}{2}\|\Delta u^*\|^2-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u^*\|^2-\frac{\beta C_1}{\sqrt{\mu}}\|\Delta u^*\|\|v^*\|\leqslant 0$。

取 $2\leqslant\delta\leqslant\delta_2,\delta_2=\min\left\{\frac{r_1r_2}{6\rho},\frac{1}{4(\frac{M\delta}{\alpha}+\frac{\beta^2C_1^2}{2r_1r_2\mu})}\right\}$,则有

$\frac{r_1r_2}{2}\|v^*\|^2+\frac{\delta}{2}\|\Delta u^*\|^2-\frac{M\delta^2}{\alpha}\|\Delta u^*\|^2-\frac{\beta C_1}{\sqrt{\mu}}\|\Delta u^*\|$

$\|v^*\|\geqslant(\frac{r_1r_2}{2}-\frac{r_1r_2}{2\delta^2})\|v^*\|^2+(\frac{\delta}{2}-\frac{M\delta^2}{\alpha}-\frac{\beta^2C_1^2\delta^2}{2r_1r_2\mu})$

$\|\Delta u^*\|^2\geqslant\frac{3r_1r_2}{8}\|v^*\|^2+\frac{\delta}{4}\|\Delta u^*\|^2$。

从而

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\|v^*\|^2+\|u^*\|_{H^2}^2+\|\eta^*\|_{\mu,V}^2+(N_1+\beta C_1)$

$\|u_x^*\|^2+(N_2+\beta C_1)\|u_y^*\|^2)+\frac{3r_1r_2}{4}\|v^*\|^2+$

$\frac{\delta}{2}\|u^*\|_{H^2}^2+\frac{\alpha}{2}\|\eta^*\|_{\mu,V}^2+2\delta(N_1+\beta C_1)\|u_x^*\|^2+$

$2\delta(N_2+\beta C_1)\|u_y^*\|^2\leqslant 0$。

令 $W(t)=(\rho\|v^*\|^2+\|u^*\|_{H^2}^2+\|\eta^*\|_{\mu,V}^2+$
$(N_1+\beta C_1)\|u_x^*\|^2+(N_2+\beta C_1)\|u_y^*\|^2)$,

并取 $c_2=\min\left\{\frac{3r_1r_2}{4\rho},\frac{\delta}{2},\frac{\alpha}{2}\right\}$ 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t)+c_2W(t)\leqslant 0 \tag{40}$$

运用 Gronwall's 定理有

$$W(t)\leqslant W(0)\exp(-c_2t)$$

其中 $t\in(0,\infty)$,又因为 $W(t)$ 关于 t 是周期函数,所以对于任意 $t\in(-\infty,\infty)$,都存在一个正整数 n_0 使 $t+n_0T>0$,并且有 $W(t)=W(t+n_0T)$。从而对于任意 $n\geqslant n_0$,有 $W(t)\leqslant W(0)\exp(-c_2nT)$。则可知 $W(t)\equiv 0$,周期解唯一,定理 5 证明完毕。

参考文献:

[1] Kato H. Existence of Periodic Solutions of the Navier-Stokes Equations[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,1997,208(1):141-157.

[2] Guo B,Du X. Existence of the Periodic Solution for the Weakly Damped Schrödinger-Boussinesq Equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2001,262(2):453-472.

[3] 罗维. 大气原始方程组时间周期解的存在性[D]. 成都:成都信息工程大学,2019.

[4] Woinowsky Krieger S. The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars[J]. J. Appl. Mech,1950,17(1):35-36.

[5] Berger H M. A new approach to the analysis of large deflections of plates[J]. Appl. Mech,1955,22:465-472.

[6] Niu L,Zhang J. Existence of global attractors for the nonlinear plate equation with memory term[J]. Mathematical Problems in Engineering,2012.

[7] Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics[M]. Springer Science & Business Media,2012.

[8] Grasselli M,Pata V. Robust exponential attractors for a phase-field system with memory[J]. Journal of Evolution Equations,2005,5(4):465-483.

Existence of Periodic Solution of Plate Equation with Linear Memory

ZHANG Tieyuan, DU Xianyun

(College of Communacation Engineering,Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225,China)

Abstract: Consider the existence of periodic solutions in a bounded domain of a two-dimensional plate equation with linear memory terms. The Leray-Schauder fixed point theorem is used to verify the existence of the approximate periodic solution of the plate equation with linear memory term, and then the convergence of the approximate solution is verified in its working space, so as to obtain the existence of the periodic solution of the plate equation with linear memory term.

Keywords: memory term; plate equation; periodic solution;applied mathematics; infinite dimensional dynamic system