

文章编号: 2096-1618(2016)03-0285-06

线性等式约束下两种集合卡尔曼滤波的等价性

谢莉清, 何腊梅

(四川大学数学学院, 四川 成都 610064)

摘要:针对含线性等式约束的非线性动力系统状态估计问题,考虑将集合卡尔曼滤波算法和估计投影方法相结合,根据不同的处理对象,提出两种不同的含线性等式状态约束的集合卡尔曼滤波算法:(1)运用估计投影方法对每个粒子进行修正之后再加权平均;(2)直接对加权平均后的状态估计向量使用估计投影方法。在约束矩阵退化为常向量,约束向量退化为常数的情况下,给出了上述两种滤波结果的等价性证明。数值模拟实例验证了这一结论。

关键词:概率论与数理统计;信息融合;集合卡尔曼滤波;估计投影;非线性系统;状态估计;状态约束

中图分类号: TN713

文献标志码: A

0 引言

动力系统的状态估计是信号处理和系统控制领域的一个基本问题。对于非线性动力系统的状态估计问题,人们已经进行了很多研究,诸如扩展卡尔曼滤波、无味滤波和粒子滤波等^[1-3]。其中,粒子滤波的应用最为广泛。然而,随着系统维数的增加,粒子滤波所需粒子数呈指数形式增长,故而当系统维数较高时,粒子滤波将面临维数灾难^[4-5]。Evensen 于 1994 年在文献[6]首次提出集合卡尔曼滤波(ensemble kalman filter, EnKF)算法,但是,若将滤波方程直接应用到每个集合成员,可能出现集合坍塌的现象,为避免这种情况,Burgers^[7]1998 年提出在集合粒子更新时,使用相互独立的扰动观测,对集合卡尔曼滤波进行了改进。由于 EnKF 的概念构想很简单,且能轻松地得到相应的公式表述,同时,不需要像扩展卡尔曼滤波那样计算非线性算子的 Jacobian 矩阵。并且,对于数千维的状态,粒子数目选取为 50~100 就足够,与粒子滤波相比,提高了计算效率,适合高维非线性动力系统的状态估计问题,被广泛应用于海洋、气象、目标跟踪等领域^[5,7-9]。

在现实应用中,由于诸多限制(例如基于物理上的考虑),状态通常都包含某些约束条件。若在状态估计过程中充分考虑这些约束对状态估计的影响,那么所得到的滤波结果将更加精确。近十几年来,含约束的状态估计问题受到了国内外学者的极大关注,得到很多新的成果^[10-13]。文献[14]、[15]提出状态含有区间约束时的 EnKF 算法。针对含等式约束的线性动力系统状态估计问题,最典型的方法就是模型降阶、

完美观测和估计投影方法^[1, 10, 16]。2007 年, Ko 等^[1]中提出,从估计误差协方差的角度来看,采用系统投影法得到的状态估计结果相比根据估计投影法得出的状态估计结果精度更高。并且, Chen^[17]指出,文献[11]中定理 2 的第一部分需要加上一个必要的假设才能成立。同时,文献[18]也给出两种不同的基于 H_∞ 滤波算法,并进行了性能比较。

对于含线性等式约束的非线性系统状态估计问题,目前很多专家都在致力于这方面的研究,也有一些新的成果。但是,各类非线性系统状态估计算法都只是对状态的近似估计,是次优的。当状态含有线性等式约束时,将状态约束施加到滤波处理过程中,得到的滤波结果仍旧是次优的,故有必要对其进行研究,提出更多高效、高精度的含约束的非线性滤波算法。考虑将 EnKF 算法与估计投影方法相结合,即应用估计投影方法将状态所包含的约束条件施加到滤波过程中,将无约束的状态估计投影到约束子空间,从而得到新的含约束的状态估计。根据不同的处理对象,有两种算法:(1)运用估计投影方法对每个粒子进行修正之后再加权平均;(2)直接对加权平均后的状态估计向量使用估计投影方法。最后,当约束矩阵退化为常向量,约束向量退化为常数时,文中将给出上述两种算法在此特定情形下滤波结果的等价性证明。这一结论将在文中两个算例中得到证实。

1 含有等式约束的非线性动力系统

考虑离散时间非线性动力系统如下:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k \quad (1)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (2)$$

收稿日期: 2015-02-11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61374027); 数学地质四川省重点实验室开放基金资助项目(scssdz2011006)

其中 $x_k \in R^n$ 为系统在 k 时刻的状态向量, $y_k \in R^m$ 为系统在 k 时刻的观测向量, f 和 h 分别为状态转移函数和量测函数, w_k 和 v_k 分别为加性过程噪声和观测噪声, 它们都是零均值高斯噪声, 协方差矩阵分别为 Q_k 和 R_k , 并且 w_k 和 v_k 互不相关。假设状态向量存在如下线性等式约束:

$$D_k x_k = d_k \quad (3)$$

其中 $D_k \in R^{s \times n}$ 为已知状态约束矩阵, $d_k \in R^{s \times 1}$ 为已知约束向量, s 为约束个数, 且 $s \leq n$ 。

2 含线性等式状态约束的集合卡尔曼滤波

在这一节中, 首先介绍无约束的集合卡尔曼滤波算法, 接着给出两种不同的含线性等式状态约束的集合卡尔曼滤波算法。然后, 从理论上证明, 当约束矩阵退化为常向量, 约束向量退化为常数时, 由这两种不同的算法得到的状态估计结果是等价的。

2.1 无约束的集合卡尔曼滤波算法

EnKF 是由 Evensen 于 1994 年在文献 [6] 中首次提出的, 它是一种基于蒙特卡罗方法的数据同化算法。其核心思想是, 通过对状态进行采样得到初始状态粒子集合, 并利用集合的样本误差协方差得到总体协方差的近似值, 实现了利用观测信息对每个粒子进行更新。基本集合卡尔曼滤波器的实现步骤^[9] 如下 (设定集合粒子数为 q):

步骤 1 初始化。对已知状态先验信息 $\{x_0, P_0\}$ 进行采样, 得到初始的分析状态集合 $X_0^a \triangleq (x_0^{a_1}, \dots, x_0^{a_q})$, 其中 $x_0^{a_i}$ 表示第 i 个分析状态粒子。令 $k = 1$ 。

步骤 2 时间更新。对每个粒子 $i = 1, \dots, q$, 得到新的预报粒子和相应的预报集合均值 \bar{x}_{k+1}^f :

$$\begin{aligned} x_{k+1}^f &= f(x_k^{a_i}, u_k) + w_k^i \\ \bar{x}_{k+1}^f &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q x_{k+1}^f \end{aligned}$$

步骤 3 计算增益矩阵。

(a) 计算总体协方差的估计值:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{k+1}^f &= \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q (x_{k+1}^f - \bar{x}_{k+1}^f) (x_{k+1}^f - \bar{x}_{k+1}^f)^T \\ \hat{P}_{yy_{k+1}}^f &= \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q (x_{k+1}^f - \bar{x}_{k+1}^f) (h(x_{k+1}^f) - h(\bar{x}_{k+1}^f))^T \\ \hat{P}_{xy_{k+1}}^f &= \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q (h(x_{k+1}^f) - h(\bar{x}_{k+1}^f)) (h(x_{k+1}^f) - h(\bar{x}_{k+1}^f))^T \end{aligned}$$

(b) 计算增益矩阵的估计值:

$$\hat{K}_{k+1} = \hat{P}_{xy_{k+1}}^f (\hat{P}_{yy_{k+1}}^f + R_{k+1})^{-1}$$

步骤 4 观测更新。

(a) 对每个粒子 $i = 1, \dots, q$, 得到分析状态粒子:

$$x_{k+1}^{a_i} = x_{k+1}^f + \hat{K}_{k+1} (y_{k+1}^i - h(x_{k+1}^f)) \quad (4)$$

其中扰动观测为 $y_{k+1}^i = y_{k+1} + v_{k+1}^i, v_{k+1}^i \sim N(0, R_{k+1})$, 且 y_{k+1} 由 (2) 式得到。

(b) 计算分析状态集合的均值和协方差:

$$\bar{x}_{k+1}^a = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q x_{k+1}^{a_i} \quad (5)$$

$$\hat{P}_{k+1}^a = \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q (x_{k+1}^{a_i} - \bar{x}_{k+1}^a) (x_{k+1}^{a_i} - \bar{x}_{k+1}^a)^T$$

步骤 5 令 $k \rightarrow k+1$, 返回步骤 2。

2.2 两种估计投影的集合卡尔曼滤波算法

在现实应用中, 状态可能包含某些约束条件, 如区间约束、线性等式约束、非线性等式约束、线性不等式约束和非线性不等式约束。而动力系统又可分为线性动力系统和非线性动力系统, 因此可以组合出多种类型的含约束的动力系统状态估计问题。

由于线性系统的局限性, 含线性等式约束的线性动力系统状态估计问题并没有很大的应用需求。在众多含约束的状态估计算法中, 系统投影法虽然从估计误差协方差的角度来看优于估计投影方法, 但是系统投影法并不适用于含约束的非线性动力系统的状态估计, 而估计投影法则并没有这样的局限性, 它可以很好地延拓到含约束的非线性动力系统的状态估计之中。同时, 估计投影法的计算复杂度小, 易于实现, 且误差性能较好, 是一种简单有效的基于卡尔曼滤波框架的解决方法。由此可见, 应用估计投影法处理含约束的非线性系统的状态估计问题是很有意义的。

所谓估计投影方法, 就是把无约束的状态估计投影到状态约束的平面上。若假设无约束的状态估计为 \hat{x} (此处为了简化, 忽略了作为时刻的下标 k), 则估计投影方法便是解决下列最优化问题^[10, 16]:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \operatorname{argmin}_x (x - \hat{x})^T W (x - \hat{x}) \\ \text{s. t. } &x \in R^n \cap \{x; D_x = d\} \end{aligned}$$

其中 $W \in R^{n \times n}$ 为一对称正定权矩阵。

主要考虑非线性动力系统中状态含有线性等式约束的情形。假设状态包含约束条件 (3) 式, 采用上述的估计投影方法对由 EnKF 算法得到的状态估计值进行修正。由于在 EnKF 算法中, 是对每个预报粒子进行更新得到分析粒子, 接着再通过加权平均得到某时刻的估计向量, 故可以考虑分别对分析粒子和估计向量使用估计投影方法, 由此可以得到两种不同的滤波算法, 即: 分别将无约束的状态估计值 $x_k^{a_i}$ 和 \bar{x}_k^a 投影到

相应的约束子空间,得到含约束的状态估计值 \hat{x}_k^i 和 \hat{x}_k ,这分别对应下述的两种算法。

2.2.1 算法1

考虑在2.1节中的步骤4(a)与步骤4(b)之间加入估计投影方法,即首先运用估计投影方法对(4)式中每个无约束的状态估计粒子 $x_k^{a_i}$ 进行修正,然后再加权平均得到新的含约束的状态估计向量 \tilde{x}_k ,并以此替代(5)式中的结果,此时含线性等式约束的状态估计问题为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^i &= \operatorname{argmin}_{x_k} (x_k - x_k^{a_i})^T W (x_k - x_k^{a_i}) \\ \text{s. t. } x_k &\in R^n \cap \{x; D_k x = d_k\} \end{aligned}$$

其中 $W \in R^{n \times n}$ 为一对称正定权矩阵。

采用 Lagrange 乘子法求解上述优化问题, Lagrange 函数为

$$J(\tilde{x}_k^i, \lambda) = (\tilde{x}_k^i - x_k^{a_i})^T W (\tilde{x}_k^i - x_k^{a_i}) + 2\lambda^T (D_k \tilde{x}_k^i - d_k)$$

对上式求偏导,并令其为0,则:

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \tilde{x}_k^i} = 2W(\tilde{x}_k^i - x_k^{a_i}) + 2D_k^T \lambda = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} = D_k \tilde{x}_k^i - d_k = 0 \end{cases}$$

所以含约束的状态估计粒子为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^i &= x_k^{a_i} - W^{-1} D_k^T (D_k W^{-1} D_k^T)^{-1} (D_k x_k^{a_i} - d_k), \\ i &= 1, \dots, q \end{aligned} \quad (6)$$

k 时刻含约束的状态估计向量为

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \tilde{x}_k^i \quad (7)$$

2.2.2 算法2

考虑在2.1节中的步骤4(b)与步骤5之间加入估计投影方法,即直接对(5)式中无约束的加权平均后的状态估计向量 \bar{x}_k^a 使用估计投影方法进行修正,得到含约束的状态估计向量 \hat{x}_k ,并将其用于下一时刻的状态预报,则含线性等式约束的状态估计问题为:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= \operatorname{argmin}_{x_k} (x_k - \bar{x}_k^a)^T W (x_k - \bar{x}_k^a) \\ \text{s. t. } x_k &\in R^n \cap \{x; D_k x = d_k\} \end{aligned}$$

类似地,利用 Lagrange 乘子法处理上述优化问题,得到含约束的状态估计向量:

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k^a - W^{-1} D_k^T (D_k W^{-1} D_k^T)^{-1} (D_k \bar{x}_k^a - d_k) \quad (8)$$

在这两种算法中, W 这一对称正定权矩阵的选取对滤波结果是有影响的。文献[16]中已经证明,若状态向量服从高斯分布,当 $W = P^{-1}$ 时,滤波结果的估计误差协方差最小;当 $W = I$ 时,则得到最小均方误差估计。同时,对于任意满足条件的 W ,由(8)式得到的状态估计是无偏的。类似地,根据此定理的证明过程和期望的线性性可知,由(7)式得到的状态估计也是无偏估计。

上述两种算法都是针对状态约束为线性的情形,

对于非线性状态约束,当约束的非线性程度较弱时,利用泰勒展开,便可将其转化为(3)式这种线性等式约束的形式^[10]。但是,对于强非线性等式约束,这种简单的线性化处理会导致滤波结果产生较大误差。

2.3 两种算法在特定情形下的等价性

当约束矩阵 D_k 退化为常向量,约束向量 d_k 退化为常数时, $D_k \in R^{1 \times n}$, $d_k \in R$, $x_k \in R^{n \times 1}$, $W \in R^{n \times n}$ 。事实上,这种情形也是实际应用中经常会遇到的。例如在陆地车辆的GPS导航系统定位问题中,状态 x_k 包含4个分量,分别为车辆的向北方向和向东方向的位置,以及向北方向和向东方向的速度。如果已知车辆在道路上是以固定的航向 θ 在行驶,则 $x(1)/x(2) = x(3)/x(4) = \tan\theta$,由于速度约束隐式地对位置进行约束,于是对应等式约束(3)式,此时的约束矩阵为 $D_k = [0 \ 0 \ 1 \ -\tan\theta] \in R^{1 \times n}$,约束向量为 $d_k = 0 \in R$,其中 $n=4$ 。这一节主要探讨 $D_k \in R^{1 \times n}$, $d_k \in R$,且 D_k 和 d_k 均为常量的这种特定情形下2.2节中给出的两种算法的等价性。

定理 当 $D_k \in R^{1 \times n}$, $d_k \in R$,且 D_k 和 d_k 均为常量时,算法1和算法2得到的状态估计结果(7)式和(8)式是等价的。

证明: 由 $D_k \in R^{1 \times n}$, $d_k \in R$ 均为常量知, $D_k W^{-1} D_k^T$, $D_k x_k^{a_i} - d_k$, $D_k \bar{x}_k^a - d_k \in R$ 。则(6)式可变形为

$$\tilde{x}_k^i = x_k^{a_i} - \frac{D_k x_k^{a_i} - d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} W^{-1} D_k^T$$

所以,算法1中的状态估计向量为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \tilde{x}_k^i \\ &= \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q x_k^{a_i} - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \left(\frac{D_k x_k^{a_i} - d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} W^{-1} D_k^T \right) \\ &= \bar{x}_k^a - \left(\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{D_k x_k^{a_i} - d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} \right) W^{-1} D_k^T \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \frac{D_k x_k^{a_i} - d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} &= \frac{\frac{1}{q} \sum_{i=1}^q (D_k x_k^{a_i})}{D_k W^{-1} D_k^T} - \frac{d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} \\ &= \frac{D_k \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q x_k^{a_i} - d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} \\ &= \frac{D_k \bar{x}_k^a - d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} \end{aligned}$$

故而

$$\tilde{x}_k = \bar{x}_k^a - \frac{D_k \bar{x}_k^a - d_k}{D_k W^{-1} D_k^T} W^{-1} D_k^T$$

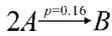
$$= \bar{x}_k^a - W^{-1} D_k^T (D_k W^{-1} D_k^T)^{-1} (D_k \bar{x}_k^a - d_k)$$

这与算法2得到的状态估计结果(8)相同,定理得证。

3 数值模拟

3.1 算例1

考虑在一个充分混合的定容等温的间歇式反应器中,物种A到物种B的气相不可逆反应如下^[19]:



在此间歇式反应器中,气相物种摩尔分数 x_A 和 x_B 的动力系统由下列非线性微分方程描述:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5px_A^2 \\ 5px_A^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

用 $x_{A,k}$ 和 $x_{B,k}$ 分别表示状态在 k 时刻的两个分量,则摩尔分数初始值(即 $k=0$ 时)为 $x_{A,0} = 0.75, x_{B,0} = 0.25$ 。且摩尔分数本身就具有如下约束:

$$Cx = 1, \quad x \geq 0, \quad \forall k,$$

其中 $x = [x_A \ x_B]^T, C = [1 \ 1]$ 。采样间隔为 $T = 0.1 \text{ s}$, 总的反应器压力 \prod_k 为摩尔分数的非线性函数:

$$\prod_k = \frac{5}{x_{A,k} + 2x_{B,k}} + v_k$$

其中 $v_k \sim N(0, 0.1^2)$ 。

集合粒子数设定为 $q = 30$, 估计过程中的初始条件为 $\hat{x}_0 = x_0, \hat{P}_0 = I_2$ 。(9)式中本是无噪声的,在滤波处理过程中设置过程噪声为 $w_k \sim N(0, 10^{-6}I_2)$ 。将算法1和算法2得到的状态估计值分别记为 cEnKF1和 cEnKF2, 状态的真实值记为 True, 使用 MATLAB (2012a) 软件对上述系统进行仿真, 仿真步数为 100, 并在作图时将状态的两个分量分开考虑以便观察, 模拟结果如图1、图2所示。

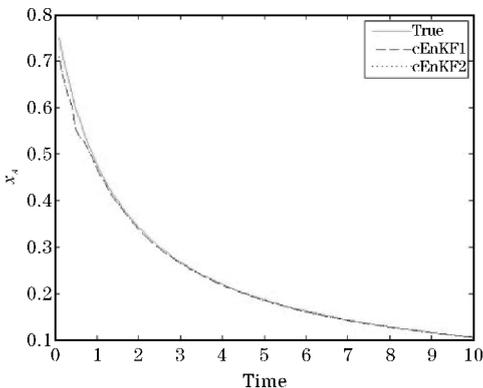


图1 x_A 的真实值、算法1和算法2的估计值的对比曲线

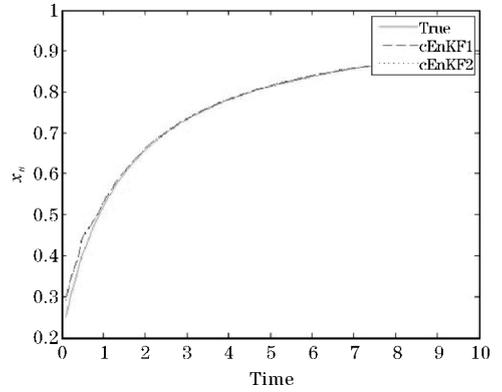


图2 x_B 的真实值、算法1和算法2的估计值的对比曲线

从图1和图2中可以看出提出的算法1和算法2得到的状态估计结果非常接近状态真实值,状态的估计效果很好。同时,在此例的特定状态约束下,算法1和算法2得到的状态估计结果是等价的,这一结果验证了2.3节中的理论证明。

3.2 算例2

考虑陆面车辆的GPS导航问题,目标状态向量为 $x = [\xi \ \zeta \ \dot{\xi} \ \dot{\zeta}]^T$, 状态的4个分量分别表示车辆的向北方向和向东方向的位置,以及向北方向和向东方向的速度。假设目标作匀速直线运动,且传感器的量测值为目标的径向距离 r , 则其系统方程表示为

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + w_k$$

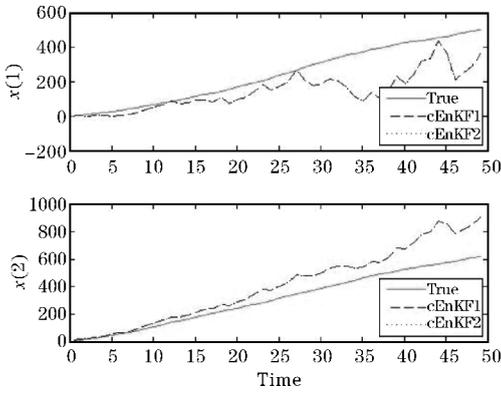
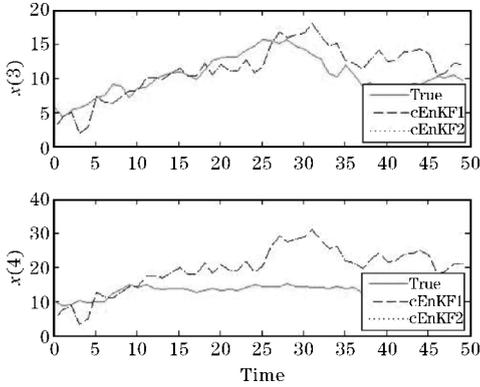
$$r_k = \sqrt{\xi_k^2 + \zeta_k^2} + v_k$$

其中 T 为离散时间步长,过程噪声协方差和观测噪声协方差分别为 $Q = \text{diag}([1 \ 1 \ 1 \ 1]), R = 1e - 6$ 。

如果已知车辆在道路上是以固定的航向 θ 在行驶,则由2.3中所述可知,状态具有形如(3)式的约束条件,其中 $D_k = [0 \ 0 \ 1 \ -\tan\theta], d_k = 0$ 。

实验过程中,设置 $\theta = 30^\circ, T = 1 \text{ s}$, 一共仿真50秒,使用的状态向量初始值为 $x_0 = [0 \ 0 \ 10\tan\theta \ 10]$, 并在估计过程中将其作为初始估计,且初始估计协方差为 $P_0 = \text{diag}([10 \ 10 \ 1 \ 1])$, 集合粒子数 q 设置为30, 仿真结果如图3、图4所示。

在此例中, $D_k \in R^{1 \times 4}, d_k \in R$, 且 D_k 和 d_k 均为常量。由图3和图4可知,此时,提出的算法1和算法2得到的状态估计结果是等价的,这一结果验证了2.3节中的理论证明。

图3 $x(1)$ 、 $x(2)$ 的真实值与各算法的估计值的对比曲线图4 $x(3)$ 、 $x(4)$ 的真实值与各算法的估计值的对比曲线

4 结束语

针对线性等式状态约束下的非线性系统状态估计问题,提出了两种不同的含线性等式约束的集合卡尔曼滤波算法,并证明了当约束矩阵退化为常向量,约束向量退化为常数时,给出的两种算法得到的滤波结果是等价性的。仿真实例验证了这一结论。

参考文献:

- [1] Simon D. Optimal State Estimation [M]. New York: INC. Press, John Wiley & Sons, 2006: 212-217, 400-468.
- [2] 陈金广,李洁,高新波. 等式状态约束下的粒子滤波算法[J]. 电子科技大学学报, 2011, 40(4): 596-601.
- [3] 杜航原,郝燕玲,赵玉新. 基于集合卡尔曼滤波的改进粒子滤波算法[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(7): 1653-1657.
- [4] Bengtsson T, Bickel P, Li B. Curse-of-dimensionality revisited: collapse of the particle filter in very large scale systems [J]. IMS Collections, 2008, (2): 316-334.
- [5] Snyder C, Bengtsson T, Bickel P, et al. Obstacles to high-dimensional particle filtering [J]. Mon. Weather Rev., 2008, 136: 4629-4640.
- [6] Evensen G. Sequential data assimilation with a non-linear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics [J]. Journal of Geophysical research, 1994, 99(C5): 10, 143-10,162.
- [7] Burgers G, van Leeuwen P J, Evensen G. Analysis scheme in the ensemble Kalman Filter [J]. Monthly Weather Review, 1998, 126: 1719-1724.
- [8] Evensen G. The Ensemble Kalman Filter: theoretical formulation and practical implementation [J]. Ocean Dynamics, 2003, 53(4): 343-367.
- [9] Gillijns S, Mendoza O B, Chandrasekar J, et al. What is the ensemble Kalman filter and how well does it work [C]. Proceedings of the American Control Conference, 2006: 4448-4453.
- [10] Simon D. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms [J]. IET Control Theory Appl., 2010, 4(8): 1303-1318.
- [11] Sangho Ko, Robert R Bitmead. State estimation for linear systems with state equality constraints [J]. Automatic, 2007, 43(8): 1363-1368.
- [12] Xu Linfeng, Li X R. Modeling and state estimation for dynamic systems with linear equality constraints [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(11): 2927-2939.
- [13] Duan Z S, Li X R. The role of pseudo measurements in equality-constrained state estimation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49: 1654-1666.
- [14] Prakash J, Patwardhan S C, Shah S L. Constrained state estimation using the ensemble Kalman filter [C]. Proceedings of the 2008 American Control Conference, 2008: 3542-3547.
- [15] Ishihara S, Yamakita M. Constrained state estimation for nonlinear systems with non-Gaussian noise [C]. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, 2009: 1279-1284.
- [16] Simon D, Chia T L. Kalman filtering with state equality constraints [J]. IEEE transactions on aerospace and electronic systems, 2002, 38(1): 128-136.

- [17] Chen Tianshi. Comments on “State estimation for linear systems with state equality constraints” [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 46(8): 1929–1932.
- [18] 王兆敏,徐杰,何腊梅,等. 线性状态等式约束下两种 H_∞ 滤波的比较 [J]. 成都信息工程大学学报, 2011, 26(6): 642–646.
- [19] Ungarala S. A direct sampling particle filter from approximate conditional density function supported on constrained state space[J]. Computers and Chemical Engineering, 2011, 35 (6): 1110 – 1118.

The Equivalence of Two Kinds of Ensemble Kalman Filter with Linear Equality Constraints

XIE Li-qing¹, HE La-mei²

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: For the problem of state estimation for nonlinear systems with linear state equality constraints, the method that combines ensemble Kalman filter with estimate projection approaches is presented. According to the different objects, there are two different algorithms of the ensemble Kalman filter with linear equality constraints: (1) calculating weighted average after using estimate projection method to correct each particle; (2) applying estimate projection method to calculating weighted average of the unconstrained state estimation vector. It is theoretically proved that the state estimation results of the two proposed algorithms are equivalent when the constraint matrix reduces to a constant vector, and the constraint vector reduces to a constant. Simulation results verify this conclusion.

Key words: probability and statistics; information fusion; ensemble Kalman filter; estimate projection; nonlinear system; state estimation; state constraints