

文章编号: 2096-1618(2017)02-0122-06

# 一种基于 SOCP 和 IFT 的频率-方向不变波束形成方法

廖峰乙, 何培宇, 崔 敖, 徐自立

(四川大学电子信息学院, 四川 成都 610064)

**摘要:**常规波束形成中主瓣宽度随频率和方向(方位角和俯仰角)变化,进而影响阵列分辨率及波束形成器的整体性能。为实现频率-方向不变波束形成,提高波束形成可靠性,基于约束优化的思想,提出一种基于二阶锥规划(second order cone programming, SOCP)和傅里叶逆变换(Inverse Fourier Transform, IFT)的宽带频率-方向不变恒定束宽波束形成方法。方法以均匀矩形平面阵为模型,首先采用 SOCP 波束优化设计方法得到参考波束,再基于 IFT 设计出参考方向上的频率不变恒定主瓣波束,最后基于提出的 SOCP 二维方向不变波束形成新方法实现不同频点上的方向不变恒定主瓣波束。经仿真分析,方法设计的波束在数字频率  $\pi/2 \sim \pi$ 、不同方位角及俯仰角指向  $15^\circ \sim 50^\circ$  上均具有束宽较恒定的波束,与基于线阵的恒定束宽波束形成方法相比,提高了波束形成器在实际空间中的可靠性,具有一定的相关工程应用参考价值。

**关键词:**频率-方向不变波束形成;恒定束宽;二阶锥规划;傅里叶逆变换

**中图分类号:** TN911

**文献标志码:** A

**doi:** 10.16836/j.cnki.jcuit.2017.02.003

## 0 引言

宽带波束形成是阵列信号处理研究的一个重要方向,已被广泛应用于无线通信、雷达及声呐等多个领域。在目前已有的阵列中,不同波束指向角所对应的波束主瓣宽度不一样,若波束指向角变化,波束主瓣也随之改变<sup>[1]</sup>,这使阵列分辨率随着波束指向角的变化而变化,进而影响整个阵列的指向性能。另一方面,对于常规宽带波束形成方法来说,由于不同频率分量所对应的波束主瓣宽度不一致,从而导致阵列输出的宽带信号频谱发生畸变。因此,波束主瓣在不同方向、不同频率条件下的不一致必然会影响到波束形成器的整体性能。然而,在宽带阵列信号处理中,通常要求阵列系统能够不失真地输出从不同方向入射的宽带信号。频率不变波束形成(frequency invariant beamforming, FIB)技术和方向不变波束形成(steering invariant beamforming, SIB)技术能够分别满足上述要求,因此对于宽带频率-方向不变波束形成技术的研究越来越深入。

恒定束宽指的是在不同情况下,阵列波束形成的波束主瓣宽度能够始终保持不变。从概念上分,恒定束宽波束形成可以分为窄带方向不变恒定束宽波束形成和宽带频率不变恒定束宽波束形成两个方向。目前,恒定束宽波束形成的研究,主要集中在频率不变恒定束宽波束形成<sup>[2-6]</sup>,其中文献[6]提出的基于二维 IFT 的频率不变波束形成方法设计的波束具有较好的

频率不变性。而对于方向不变恒定束宽波束形成及频率-方向不变恒定束宽波束形成的研究则相对较少。文献[7]提出的窄带波束优化设计方法能在一定的波束指向角范围内保持波束主瓣宽度恒定,但其主要聚焦于窄带一维波束形成,适用阵列也仅是线阵。文献[8]提出了宽带频率-方向不变恒定主瓣波束形成方法,但其也仅针对线阵。平面阵能够兼顾方位角和俯仰角,同时也能用于实现频率不变波束,相对于线阵而言能够形成更窄的波束主瓣及更低的旁瓣,波束形成更可靠,但基于平面阵的恒定束宽波束形成研究目前几乎是空白。

为提高宽带信号波束形成器在不同方向(俯仰角和方位角)和不同频率上的指向性能,在文献[6]和文献[7]的基础上,提出一种基于 SOCP 和 IFT 的宽带频率-方向不变恒定束宽波束形成方法,将阵形由均匀线阵拓展至均匀矩形平面阵。首先,基于 SOCP 波束优化设计方法,在参考频率和参考方向上设计出参考波束。然后基于二维 IFT 频率不变波束形成方法,实现参考方向上的频率不变恒定主瓣波束。再以前述频率不变恒定主瓣波束为参考,在各个波束指向角上以主瓣逼近和旁瓣最小为约束,基于 SOCP 设计不同方向上的方向不变恒定主瓣波束。最后设计仿真对比实验,验证了方法的可行性。

## 1 阵列数学模型

考虑一个由  $N$  个全向麦克风阵元组成的均匀矩形麦克风阵列,阵元间距均为  $d$ ,如图 1 所示。

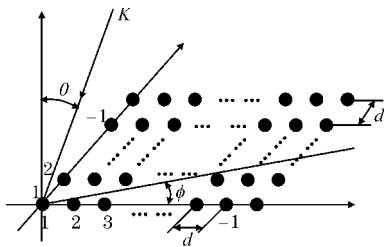


图1 均匀矩形麦克风阵列示意图

假设一个远场单频平面波信号以方位角  $\varphi$  和俯仰角  $\theta$  入射到阵列上,此时阵列的输出信号为

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{W}^H \mathbf{X} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{W}$  是矩形阵列加权矢量,  $\mathbf{X}$  表示阵列接收信号。设矩形阵的行数为  $y$ , 列数为  $x$ , 即  $N=y \times x$ , 那么在第  $y$  行和第  $x$  列上的权值向量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{W}_y = [\omega_{1,y}, \omega_{2,y}, \dots, \omega_{x,y}]^T \\ \mathbf{W}_x = [\omega_{x,1}, \omega_{x,2}, \dots, \omega_{x,y}]^T \end{cases} \quad (2)$$

则阵列的权值可表示为  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_y \otimes \mathbf{W}_x$ ,  $\otimes$  表示矩阵的克罗内克积。设信号幅度为  $A$ , 信号频率为  $\omega_0$ , 则第  $y$  行和第  $x$  列上的接收信号分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_y &= [x_{1,y}, x_{2,y}, \dots, x_{x,y}]^T = A e^{j\omega_0 t} \mathbf{a}_y \\ \mathbf{X}_x &= [x_{x,1}, x_{x,2}, \dots, x_{x,y}]^T = A e^{j\omega_0 t} \mathbf{a}_x \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{a}_y$  和  $\mathbf{a}_x$  表示信号的导向矢量即

$$\begin{cases} \mathbf{a}_y = [1, e^{-j2\varphi_y(\varphi, \theta)}, e^{-j4\varphi_y(\varphi, \theta)}, \dots, e^{-j(Y-1)\varphi_y(\varphi, \theta)}]^T \\ \mathbf{a}_x = [1, e^{-j2\varphi_x(\varphi, \theta)}, e^{-j4\varphi_x(\varphi, \theta)}, \dots, e^{-j(Y-1)\varphi_x(\varphi, \theta)}]^T \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{cases} \varphi_y(\varphi, \theta) = 2\pi d \sin\theta \cdot \cos\varphi / \lambda \\ \varphi_x(\varphi, \theta) = 2\pi d \sin\theta \cdot \sin\varphi / \lambda \end{cases} \quad (5)$$

则由此可得阵列的输入信号为  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_y \otimes \mathbf{X}_x$ 。

定义行阵波束响应和列阵波束响应分别为  $p_y(\varphi, \theta) = \mathbf{W}_y^H \cdot \mathbf{a}_y$  和  $p_x(\varphi, \theta) = \mathbf{W}_x^H \cdot \mathbf{a}_x$ , 则整个矩阵的波束响应为

$$p(\varphi, \theta) = p_y(\varphi, \theta) \otimes p_x(\varphi, \theta) \quad (6)$$

由此便得到信号入射角为  $[\varphi, \theta]$  时的波束响应。同时, 定义方位角方向上和俯仰角方向上的旁瓣级束宽分别为  $[\varphi_L, \varphi_R]$  和  $[\theta_L, \theta_R]$  即波束主瓣区域, 其余的部分为波束旁瓣区域。

## 2 频率-方向不变恒定束宽波束形成

文中提出的基于 SOCP 和 IFT 的宽带频率-方向不变恒定束宽波束形成方法用流程图描述为如图2所示。该方法主要包含3个部分: 子频带划分及参考波束形成、基于 IFT 的频率不变波束形成及基于 SOCP 的方向不变波束形成。图中信源为远场宽带信号, 麦克风阵列均为均匀矩形平面阵,  $f_1, f_2, \dots, f_K$  分别表示划

分出的每个子频带中心频率对应的接收信号,  $v_1, v_2, \dots, v_K$  分别表示经过频率不变波束形成之后每个子频带中心频率对应的信号。

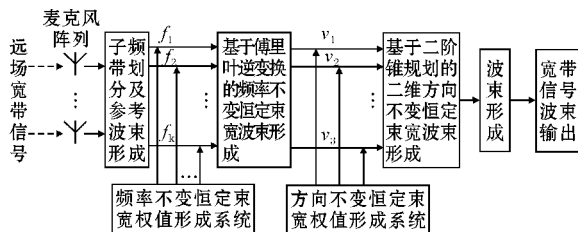


图2 频率-方向不变恒定束宽波束形成原理框图

### 2.1 子频带划分及参考波束设计

假设宽带信号的频率范围为  $(F_l, F_h)$ , 子频带划分系统将其均匀划分成  $K$  个子带, 每一个子带的中心频率为

$$F_i = F_l + (2i-1) \times [(F_h - F_l) / (2K)], i = 1, 2, \dots, K \quad (7)$$

采用基于 SOCP 的文件旁瓣控制高增益波束设计方法设计参考波束, 能够在保持波束旁瓣水平稳定的情况下实现较高增益的波束形成, 其约束准则为:

$$\begin{aligned} \min_w & \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \\ \text{s. t. } & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_r, \theta_r) = 1 \\ & |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_i, \theta_j)| \leq \delta_i, i = 1, 2, \dots, N_{SL}, j = 1, 2, \dots, \\ & m_{SL} \|\mathbf{w}\| \leq \sqrt{\xi_0} \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $\xi_0$  为预置的约束值(约束值越小表示波束形成器的稳定性越好),  $(\varphi_r, \theta_r)$  为波束指向角,  $\mathbf{w}$  为阵列加权值,  $\mathbf{R}$  表示信号协方差矩阵,  $\mathbf{a}$  为信号导向矢量, 方位角和俯仰角旁瓣区域分别被均匀离散化为  $N_{SL}$  和  $M_{SL}$  个离散角度。将其转化为标准二阶锥规划问题, 再求得最优解即可得到参考波束。

### 2.2 基于 IFT 的频率不变恒定束宽波束形成

基于 IFT 的频率不变恒定束宽波束形成有时域和频域两种实现方法<sup>[6,9]</sup>, 两种方法形成的波束都具有较好的频率不变性。这里采用文献[6]提出的频域实现方法, 其原理如下:

采用图1的均匀矩形阵列, 阵元间距取最高频率对应波长的一半设为  $d$ , 假设阵元的位置坐标为  $(xd, yd)$ ,  $x=0, 1, \dots, (X-1)$ ,  $y=0, 1, \dots, (Y-1)$  其波束响应为

$$P(\Omega, \theta, \varphi) = \sum_{x=0}^{X-1} \sum_{y=0}^{Y-1} D(xd, yd, \Omega) \cdot e^{-j\Omega(xd \sin\theta \cos\varphi + yd \sin\theta \sin\varphi) / c} \quad (9)$$

其中,  $d$  为阵元间距,  $\Omega$  表示角频率,  $D(xd, yd, \Omega)$  表示

位于 $(xd, yd)$ 处的阵元的频率响应,  $\theta$  表示信号来波俯仰角,  $\varphi$  表示信号来波方位角,  $c$  表示声音传播速度。令  $\Omega_1 = \Omega \sin \theta \cos \varphi d / c$  和  $\Omega_2 = \Omega \sin \theta \sin \varphi d / c$ , 则式(9)可表示为

$$P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) = \sum_{x=1}^{X-1} \sum_{y=1}^{Y-1} D(xd, yd, \Omega) \cdot e^{-jx\Omega_1} \cdot e^{-jy\Omega_2} \quad (10)$$

由式(10)可以看出, 在经过变量代换后, 波束响应  $P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2)$  与频率响应  $d(xd, yd, \Omega)$  之间满足二维傅里叶变换的关系。

要使  $P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2)$  具有频率不变性, 即

$$P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) = F(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi) \quad (11)$$

则变量  $\Omega_1, \Omega_2$  和  $\Omega$  之间就要有一定的依赖关系, 使  $P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2)$  中的  $\Omega$  能够被消除。如果  $P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2)$  是  $c\Omega_1/\Omega d$  和  $c\Omega_2/\Omega d$  的函数, 而  $c\Omega_1/\Omega d = \sin \theta \cos \varphi$  且  $c\Omega_2/\Omega d = \sin \theta \sin \varphi$ , 变量替换后就能够实现波束响应与频率无关。方法的实现步骤为:

(1) 将宽带信号划分为若干个窄带信号, 即子带。

(2) 设计波束响应  $F(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$ 。

(3) 通过变量替换求出各个频率分量对应的波束响应为

$$P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2) = \begin{cases} F(c\Omega_1/\Omega d, c\Omega_2/\Omega d), \\ \quad \text{for } ((c\Omega_1/\Omega d)^2 + (c\Omega_2/\Omega d)^2) \\ \quad \leq 1 \wedge \Omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}] \\ A(\Omega_1, \Omega_2), \text{ for otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\Omega_1 \in [-\pi, \pi]$ ,  $\Omega_2 \in [-\pi, \pi]$ ,  $A(\Omega_1, \Omega_2)$  表示函数值有限的任意函数,  $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$  表示角频率范围。选择的  $A(\Omega_1, \Omega_2)$  应使  $P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2)$  尽可能平滑, 最简单的选择是将其置零。

(4) 对波束响应  $P(\Omega, \Omega_1, \Omega_2)$  作二维离散傅里叶逆变换, 得到  $D(xd, yd, \Omega)$  的近似值  $D(\hat{x}d, \hat{y}d, \Omega)$ ,  $\hat{x}$  的取值为  $0, 1, \dots, \hat{X}-1$ ,  $\hat{y}$  的取值为  $0, 1, \dots, \hat{Y}-1$ 。

(5) 为了匹配  $X \times Y$  的均匀矩形阵, 使用矩形窗  $w(n)$  对步骤4)得到的  $D(\hat{x}d, \hat{y}d, \Omega)$  进行截取, 从而得到  $D(xd, yd, \Omega)$ 。

(6) 求出均匀矩形阵的波束响应, 即为所求

### 2.3 基于 SOCP 的方向不变恒定束宽波束形成

将文献[7]所提基于 SOCP 的、仅针对线阵的一维方向不变恒定束宽波束形成方法拓展到基于均匀矩形平面阵的二维情况, 实现俯仰角和方位角二维恒定束宽方向不变波束形成。方法的基本原理是: 由于波束旁瓣级是需要进行约束最小化的目标, 而真正的约束在于某特定指向向上设计出的波束主瓣与参考波束主瓣之间的差值, 因此这里主要考虑主瓣约束。以上述基于 IFT 的

频率不变波束为参考, 假设参考波束指向角为  $(\varphi_r, \theta_r)$ ,  $\varphi_r$  和  $\theta_r$  分别表示方位角和俯仰角, 旁瓣水平为  $H_{SL}$  (dB), 参考波束图设为  $P_r(\varphi, \theta)$ , 由此可以计算出该波束的主瓣范围为  $[\varphi_L, \varphi_R] \cup [\theta_L, \theta_R]$ , 由旁瓣级束宽切割的参考波束主瓣为  $P_{rml}(\varphi, \theta)$ 。不同波束指向角对应的参考波束主瓣都由  $P_{rml}(\varphi, \theta)$  平移得到, 平移的角度为  $(\varphi_d - \varphi_r)$  及  $(\theta_d - \theta_r)$ ,  $(\varphi_d, \theta_d)$  为波束指向角。

以图1中  $x$  轴方向为方位角零度方向,  $z$  轴方向为俯仰角零度方向。假设感兴趣的区域为  $[\varphi_1, \varphi_2]$  和  $[\theta_1, \theta_2]$  所组成的区域, 将  $[\varphi_1, \varphi_2]$  和  $[\theta_1, \theta_2]$  分别离散化之后得到  $N$  个方位角指向角度  $\varphi_{s1}, \varphi_{s2}, \dots, \varphi_{si}, \dots, \varphi_{sN}, \varphi_{si} \in [\varphi_1, \varphi_2]$  以及  $M$  个俯仰角指向角度  $\theta_{s1}, \theta_{s2}, \dots, \theta_{sj}, \dots, \theta_{sM}, \theta_{sj} \in [\theta_1, \theta_2]$ 。对每一个方位角  $\varphi_{si}$  和俯仰角  $\theta_{sj}$  所组成的波束主瓣指向角而言, 有如下约束:

$$\begin{aligned} \min_w & \quad |w^H a(\Phi_{iSL}, \Theta_{jSL})|, i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, M \\ \text{s. t. } & \quad w^H a(\varphi_{si}, \theta_{sj}) = 1 \\ & \quad \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q |P_d(\varphi_{iq}, \theta_{jp}) - P_r(\varphi'_{iq}, \theta'_{jp})|^2 < \varepsilon, \\ & \quad \varphi_{iq} \in [\varphi_L, \varphi_R]_i, \theta_{jp} \in [\theta_L, \theta_R]_j \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\varphi_{si}$  和  $\theta_{sj}$  表示感兴趣区域内的第  $i$  个方位角波束指向和第  $j$  个俯仰角波束指向,  $\Phi_{iSL}$  和  $\Theta_{jSL}$  分别为  $\varphi_{si}$  和  $\theta_{sj}$  对应的旁瓣区域,  $[\varphi_L, \varphi_R]$  和  $[\theta_L, \theta_R]$  分别为  $\varphi_{si}$  和  $\theta_{sj}$  对应的主瓣区域, 俯仰角方向上的主瓣离散数为  $P$ , 方位角方向上的主瓣离散数为  $Q$ ,  $a(\varphi_{si}, \theta_{sj})$  为均匀矩形阵的导向矢量,  $P_r(\varphi'_{iq}, \theta'_{jp})$  为移动后的参考波束主瓣响应,  $P_d(\varphi_{iq}, \theta_{jp})$  为设计的波束主瓣响应。当  $\varphi_{si}$  和  $\theta_{sj}$  取遍整个区域, 就可以在不同的主瓣指向角度上获得具有相同主瓣宽度的波束图, 同时波束的旁瓣级会自适应的调整并达到此条件下的最小值, 这样就实现了方向不变恒定束宽波束形成。

式(13)所提出的约束问题可以转化为标准的二阶锥约束形式。二阶锥规划属于凸优化范畴, 是一种很好的内点算法, 其有一个很明显的特点, 即任何局部最优点都是全局最优点。标准的凸优化问题定义为

$$\max_b^T y, \text{ s. t. } c - A^T y \in \kappa \quad (14)$$

式中  $b$  和  $c$  为任意向量,  $A$  是任意的系数矩阵,  $y$  是包含有未知参数的向量, 而  $\kappa$  是一个对称锥的集合。  $A$ 、 $b$  和  $c$  的维数必须匹配, 各向量均可以为复数。可利用凸优化求解工具对其进行求解得到向量  $y$ , 其最后  $N$  个值即为权向量  $W$ 。通过这种方法得到的权值向量必定是局部最优也即全局最优点, 因此是在该约束条件下的最优权值。实现平面阵列情况下的二维方向不变恒定束宽波束形成。

为能更好地求解式(13), 引入新变量, 将式(13)重写成如下:



$$\begin{aligned}
& \min_w \delta \\
& s. t. \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\varphi_{si}, \theta_{sj}) = 1 \\
& \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^P \varepsilon_{qp} < \varepsilon \\
& |P_d(\varphi_{iq}, \theta_{jp}) - P_r(\varphi'_{iq}, \theta'_{jp})|^2 \leq \varepsilon_{pq}, \\
& \varphi_{iq} \in [\varphi_L, \varphi_R]_i, \theta_{jp} \in [\theta_L, \theta_R]_j \\
& |^H \mathbf{a}(\Phi_{iSL}, \Theta_{jSL})| < \delta \\
& i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, M
\end{aligned} \quad (15)$$

式中  $\delta$  是一个新引入的非负标量,  $\varepsilon_{pq}$  是一组新引入的非负向量,  $p=1, 2, \dots, P; q=1, 2, \dots, Q$ 。

$$\text{定义} \begin{cases} \mathbf{b} \triangleq [-1, 0_{1 \times (P \times Q)}, 0_{1 \times N}]^T \\ \mathbf{y} \triangleq [\delta, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{PQ}, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]^T, \end{cases} \text{其}$$

中  $0_{1 \times N}$  表示  $1 \times N$  维的零向量。则约束式(15)中的第1个等式约束可以利用0锥的定义表示为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a}^H(\varphi_{si}, \theta_{sj}) \cdot \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{PQ \times 1}^T & \mathbf{0}_{N \times 1}^T \\ 0 & \mathbf{0}_{PQ \times 1}^T & -\mathbf{a}^H(\varphi_{si}, \theta_{sj}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} \triangleq \mathbf{c}_1 - \mathbf{A}_1^T \cdot \mathbf{y} \in \{0\}^2 \quad (16)$$

式(15)的第1个不等式约束可以用2阶锥表示为

$$\begin{aligned}
& \varepsilon - \sum_{q=1}^Q \sum_{p=1}^P \varepsilon_{qp} = \varepsilon - (0 \quad \mathbf{1}_{PQ \times 1}^T \quad \mathbf{0}_{N \times 1}^T) \cdot \mathbf{y} \triangleq \\
& \mathbf{c}_{1+1} - \mathbf{A}_{1+1}^T \cdot \mathbf{R}_+^1
\end{aligned} \quad (17)$$

式中  $\mathbf{R}_+^1$  表示为非负实数集。借鉴文献[4]和[10],式(15)的第2个不等式约束可以用2阶锥表示为

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \varepsilon_{qp} + 1 \\ 2P_r(\varphi'_{iq}, \theta'_{jp}) - 2\mathbf{a}^H(\varphi_{iq}, \theta_{jp}) \cdot \mathbf{w} \\ \varepsilon_{qp} - 1 \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 1 \\ 2P_r(\varphi'_{iq}, \theta'_{jp}) \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{e}^T(q, p) & \mathbf{0}_{N \times 1}^T \\ 0 & \mathbf{0}_{PQ \times 1}^T & 2\mathbf{a}^H(\Phi_{iSL}, \Theta_{jSL}) \\ 0 & -\mathbf{e}^T(q, p) & \mathbf{0}_{N \times 1}^T \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} \triangleq \\
& \mathbf{c}_{2+m} - \mathbf{A}_{2+m}^T \cdot \mathbf{y} \in Q_m^3, m=1, 2, \dots, (P \times Q)
\end{aligned} \quad (18)$$

式中,  $Q_m^3$  表示二阶锥:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{e}(q, p) = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{qp}, \dots, e_{QP}]^T, \\
& e_{qp} = \begin{cases} 0, & \text{others} \\ 1, & p=p, q=q \end{cases}
\end{aligned}$$

式(15)的第3个不等式约束可以用2阶锥表示为

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \delta \\ \mathbf{a}^H(\Phi_{iSL}, \Theta_{jSL}) \mathbf{w} \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}_{PQ \times 1}^T & \mathbf{0}_{N \times 1}^T \\ 0 & \mathbf{0}_{PQ \times 1}^T & \mathbf{0}_{N \times 1}^T \\ 0 & \mathbf{0}_{PQ \times 1}^T & -\mathbf{a}^H(\Phi_{iSL}, \Theta_{jSL}) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} \triangleq \\
& \mathbf{c}_{2+k+(P \times Q)} - \mathbf{A}_{2+k+(P \times Q)}^T \cdot \mathbf{y} \in Q_k^2, k=1, 2, \dots, K
\end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $K$  表示每一个波束指向角上旁瓣离散化后的总个数。

令  $\begin{cases} \mathbf{C} \triangleq [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \dots, \mathbf{c}_{2+K+(P \times Q)}^T]^T \\ \mathbf{A}^T \triangleq [\mathbf{A}_1^T, \mathbf{A}_2^T, \dots, \mathbf{A}_{2+K+(P \times Q)}^T]^T \end{cases}$ , 其中  $\mathbf{c}_i$  和  $\mathbf{A}$  分别由上述几个公式给出。则优化约束问题式(15)可以表示为标准的2阶锥优化问题

$$\begin{aligned}
& \max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
& s. t. \mathbf{C} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \in \{0\} \times R_+^1 \times Q_1^2 \times Q_2^2 \times \dots \times Q_k^2 \times Q_1^3 \times Q_2^3 \times \dots \times Q_M^3
\end{aligned} \quad (20)$$

利用 Matlab 的 SeDuMi 工具箱求得  $\mathbf{y}$  之后,其最后  $N$  个分量就是所求的权值向量  $\mathbf{w}$ 。

### 3 仿真与分析

以下仿真实验均在第一节所述均匀矩形平面阵模型下完成,阵元个数为  $15 \times 15$ ,阵元间距取20 kHz频率对应波长的一半,宽带信号频率为10~20 kHz,以参考频率为20 kHz、主波束指向  $(\varphi, \theta) = (0^\circ, 30^\circ)$  (即方位角指向  $0^\circ$ 、俯仰角指向  $30^\circ$ ) 方向时的波束主瓣为参考主瓣。

首先在参考频率20 kHz、主波束空间指向  $(\varphi, \theta) = (0^\circ, 30^\circ)$  方向上,基于 SOCP 的稳健旁瓣控制高增益波束形成方法设计一个均匀加权的参考波束,如图3(a)、(b)所示。再运用文中所提算法实现方位角、俯仰角以及频率恒定束宽波束,仿真结果如图4~图7所示。最后,设计文中方法与一维阵列的对比实验,仿真结果如图8、图9所示。

图4(a)为主波束指向  $(20^\circ, 30^\circ)$  和  $(-20^\circ, 30^\circ)$  方向时,方位角方向上频带内不同频率点上的恒定束宽三维波束图;图4(b)为主波束指向  $(0^\circ, 30^\circ)$  方向时,俯仰角方向上频带内不同频率点上的恒定束宽三维波束图。图5为波束空间指向为不同值时,频带内不同频率点上波束主瓣3 dB带宽的变化曲线。图6为频率和俯仰角固定、方位角变化时,不同方位角指向上波束主瓣3 dB带宽的变化曲线。图7为频率和方位角固定、俯仰角变化时,不同俯仰角指向上波束主瓣3 dB带宽的变化曲线。图8和图9分别为文中方法与基于 SOCP 的一维方向不变波束形成方法以及基于 IFT 的一维频率不变波束形成方法所形成的波束主瓣3 dB带宽随方位角变化情况的对比。

分析图3可知,在设定的波束指向  $(\varphi, \theta) = (0^\circ, 30^\circ)$  处有明显的高增益波束,其旁瓣均低于设计要求的-40 dB,且球坐标系下的波束主瓣光滑均匀,宽度固定为期望值  $25^\circ$ ,因此参考波束满足设计要求。从图4可以看出,在不同的固定波束指向上,利用文中方法设计的波束主瓣宽度在不同频率上能够基本保持一致,因此具有良好的频率不变性。

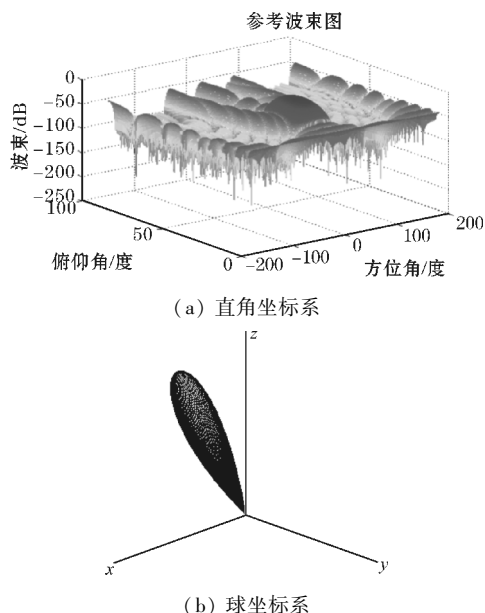
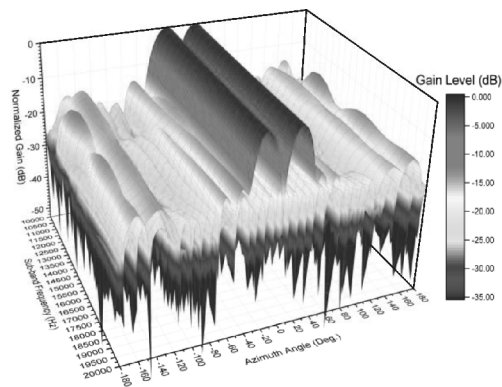
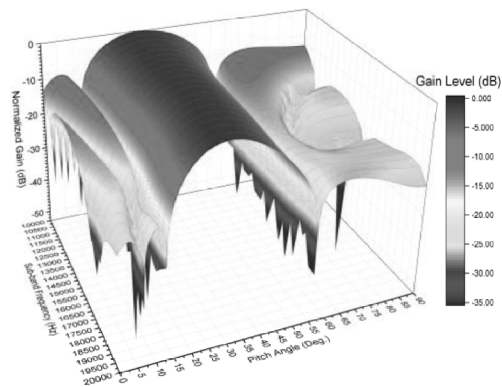


图3 三维坐标系下参考波束图



(a) 方位角方向上不同频率分量对应的波束响应



(b) 俯仰角方向上不同频率分量对应的波束响应

图4 不同波束指向角上各频率分量对应的波束响应

图5~图7分别表示在频率、方位角及俯仰角变化,同时另外两个参数为固定值时波束主瓣3 dB宽度的变化曲线图。可以看出,当仅改变频率、方位角和俯仰角其中某个参数时,从频率  $\pi/2 \sim \pi$ ,各频点上的波束主瓣3 dB宽度在  $25^\circ$  上下浮动,波动误差约  $\pm 3^\circ$ ,能够几乎保持恒定束宽;在设定的感兴趣方位角范围  $-90^\circ \sim 90^\circ$  上,波束主瓣宽度在整个方位角指向上能够保持在参考主瓣宽度上下浮动,波动误差约为  $\pm 3.5^\circ$ ,其在方位角方向上的方向不变

性良好;在设定的感兴趣俯仰角范围  $0^\circ \sim 70^\circ$ ,文中提出的算法不能在所有指向上保持束宽恒定,但在俯仰角  $15^\circ \sim 50^\circ$  能够保持较稳定的波束宽度,在此角度上具有方向不变恒定束宽。从图8可以看出,基于 SOCP 的一维方向不变波束形成方法形成的波束在方位角指向超出  $(-60^\circ, 60^\circ)$  范围时,主瓣3 dB宽度明显变大且呈现不规则变化,而文中方法设计的波束在整个感兴趣角度范围内均能够保持较稳定的波束主瓣3 dB宽度,提高了方向不变波束形成的稳定性。从图9可以看出,基于 IFT 的一维频率不变波束形成只能在较小的方位角指向  $(-45^\circ, 45^\circ)$  上具有较恒定的主瓣3 dB宽度,而文中方法能够实现全方位指向角上的恒定束宽波束。同时,文中方法还突破性地实现一定俯仰角指向上  $15^\circ \sim 50^\circ$  的恒定束宽波束形成,提高了实际空间中波束形成的可靠性。以上分析表明,提出的算法能够有效地实现针对宽带信号的方向(方位角和俯仰角)、频率恒定束宽波束。

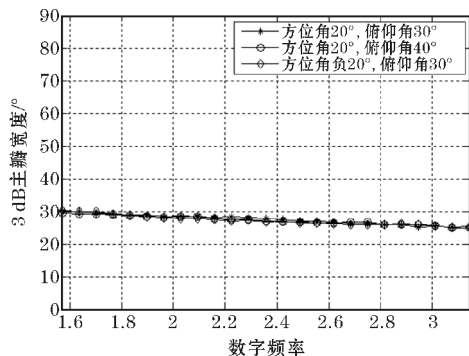


图5 主瓣宽度随数字频率变化曲线

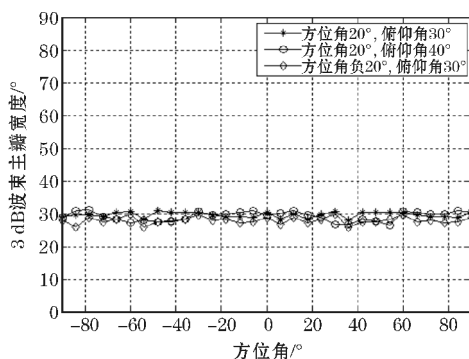


图6 主瓣宽度随方位角变化曲线

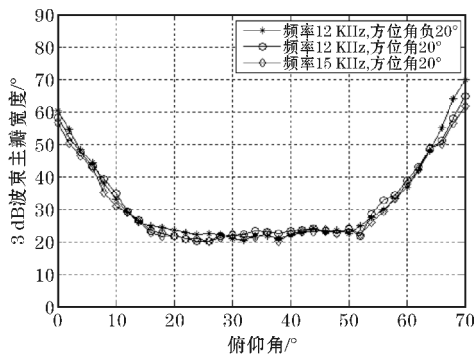


图7 主瓣宽度随俯仰角变化曲线

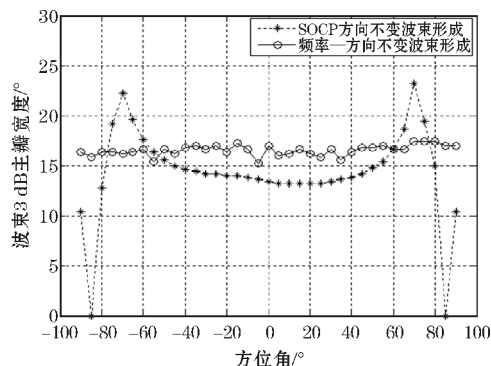


图8 不同参考主瓣方向时3 dB宽度变化曲线

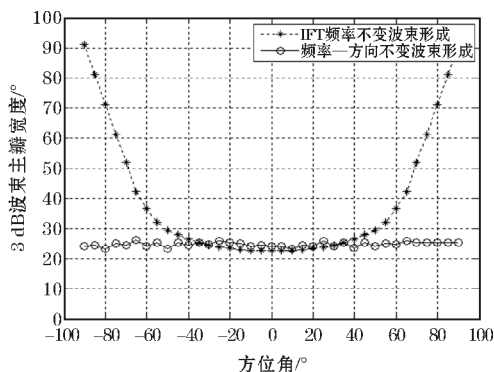


图9 不同参考主瓣方向时3 dB宽度变化曲线

## 4 结束语

基于均匀矩形平面麦克风阵列,采用二阶锥规划(SOCP)和傅里叶逆变换(IFT)方法,以波束主瓣恒定束宽为约束条件,实现了方向(方位角和俯仰角)和频率不变波束形成。经仿真分析,提出的方法设计的波束在数字频率  $\pi/2 \sim \pi$ 、方位角及俯仰角指向上均具有束宽较恒定的波束,能够较有效地实现恒定束宽波束形成,提高了波束形成器的可靠性,具有一定的相关工程应用参考价值。

## A Frequency-steering Invariant Beamforming Algorithm based on SOCP and IFT

LIAO Feng-yi, HE Pei-yu, CUI Ao, XU Zi-li

(School of Electronics & Information Engineering, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract:** Beamwidth varies with frequency and direction (azimuth angle and pitch angle) in conventional beamforming, which has great influence on the resolution of array and overall performance of beamformer. In order to achieve frequency-steering invariant beamforming and improve its reliability, a frequency-steering invariant constant beamforming algorithm based on Second Order Cone Programming (SOCP) and Inverse Fourier Transform (IFT) is proposed, which is based on the optimization of the constraint. Based on planar rectangle array, the expected beam is designed by using the optimization design method of beam based on SOCP first and using IFT to design frequency-invariant constant beamwidth beam in reference direction next. Finally, a new method for 2-D steering-invariant beamforming based on SOCP is proposed to design steering-invariant constant beamwidth beam in reference frequency. Computer simulations show that beam designed by this new method has almost constant beamwidth even with the different numerical frequency varies of  $\pi/2 \sim \pi$  or different azimuths or pitches varies of 15 to 50 degrees, which improves the reliability of beamformer in actual space compared with the constant beamforming algorithm based on linear array and has a certain reference value on engineering application.

**Keywords:** frequency-steering invariant beamforming; constant beamwidth; second order cone programming; IFT

## 参考文献:

- [1] Van Trees H L. Optimum Array Processing [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2002.
- [2] 张保嵩, 马远良. 宽带恒定束宽波束形成器的设计与实现[J]. 应用声学, 1999, 18(5): 29-33.
- [3] Ward D B, Kennedy R A, Williamson R C. Theory and design of broadband sensor arrays with frequency invariant far-field beam patterns[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1995, 97(2): 1023-1034.
- [4] Yan She-feng. Optimal design of FIR beamformer with frequency invariant patterns[J]. Applied Acoustics, 2006, 67(6): 511-528.
- [5] Liu Wei, Weiss S. A new class of broadband arrays with frequency invariant beam patterns [C]. IC-ASSP-2004, Montreal, 2004: 185-188.
- [6] Liu W, Weiss S. Design of frequency invariant beamformers for broadband arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(2): 855-860.
- [7] 幸高翔, 蔡志明. 基于二阶锥约束的方向不变恒定束宽波束形成[J]. 电子与信息学报, 2009, 21(9): 2109-2112.
- [8] 张文刚, 王杰贵, 樊甫华. 基于凸优化的频率方向二维恒定束宽波束形成技术[J]. 电子信息对抗技术, 2012, 27(6): 67-72.
- [9] Liu W, Weiss S, McWhirter J G, et al. Frequency invariant beamforming for two-dimensional and three-dimensional arrays [J]. Signal Processing, 2007, 87(11): 2535-2543.
- [10] LIU J, Gershman A B, LUO Z Q, et al. Adaptive beamforming with sidelobe control: A second-order cone programming approach[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2003, 10(11): 331-334.