文章编号：2096-1618(2017)03-0343-04

一种广义不完全维修情形下系统失效过程分析

甘成望， 吴兰瑶， 刘 洋
(西南交通大学数学学院,四川 成都 611756)

摘要：针对实际工作中无法通过维修手段让系统恢复如新,进而导致较难对系统的失效过程给予完美的刻画,Kijima在1989年提出一种与时间和维修次数相关的概念,并称之为虚拟寿命。虚拟寿命这一概念的运用,使得失效强度由虚拟寿命决定而不是系统实际运行的时间决定,基本想法是希望通过减少系统真实运行时间所得到的虚拟寿命去模拟系统的失效强度函数。文章讨论了如何将虚拟寿命这一想法与对数线性函数相融合去模拟一种广义的不完全维修情形下可修系统的失效过程,相应的参数估计和模型应用被详细讨论。

关 键 词：概率论与数理统计；可靠性理论；虚拟寿命；对数线性模型；极大似然估计；不完全维修

中图分类号：O213.2 **文献标志码**：A

doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2017.03.018

0 引言

系统在投入使用后的整个服役期内,由于受到众多因素(如负荷、腐蚀、应力、氧化等)的影响,性能不可避免会逐渐降低。维修是使系统性能处于满意水平之上的一种重要手段,中外研究学者在制定有效的维修策略来指导实际中的维修活动时,曾提出过众多维修决策模型[1-3]。而根据系统自身情况制定有效的维修策略的关键是对系统失效过程有一个较好的刻画,不同失效类型的系统,其失效过程的描述模型是不同的[4],可修系统的失效过程可以利用失效率函数进行描述,带有不同数学形式的函数曾作为失效率函数被使用来刻画可修系统的失效过程,例如幂函数、对数线性函数、S型函数等[5-7],建立与维修影响相关的模型的方法大都会涉及上述函数。对于可修系统而言,根据维修措施对设备的影响程度对维修措施进行划分,Pham等[8]将维修措施分为了三大类,这种分法是目前被广泛接受的一种分类方法：

(1)完全维修(Perfect)：即是所谓的修旧如新,指设备经维修后能达到设备的初始全新状态。它通常通过替换一个全新的部件来完成。

(2)最小维修(Minimal)：指设备修复如旧,维修之后,系统会恢复至失效的前一个状态。

(3)不完全维修(Imperfect)：是一种介于最小修和完全维修之间的一种维修行为。通过这种维修,系统状态会恢复到介于上述两种情形之间的某种状态。

基于完全维修假设情形下,可修系统的可靠性问题已经有了相对成熟的处理方法[9-10],但是对于实际运行中的系统而言,由于系统会随着运行时间的增长而出现老化现象,导致完全维修模型的假设不容易满足；而对于最小维修而言,其时间分布相对复杂,作可靠性的深入研究较为困难。在这两个因素的影响下,人们开始将注意力转移到不完全维修的情形,对于不完全维修的影响常通过失效强度递减和系统实际工作年龄递减两种与失效率函数相关的方式进行模拟。

Lawless等[11]曾使用过带有递减失效强度的对数线性模型去估计不完全维修情形下系统的性质。Guo[6]利用运行时间和维修次数去模拟失效强度和维修的影响。虚拟寿命这一概念由Kijima[12]首先提出并被Monika等[13]得以改进。文中将使用Kijima虚寿命结合对数线性函数去描述这一改进的更新过程,并在给出的算例中使用极大似然参数估计去估计过程中的参数。

1 虚拟寿命及广义更新过程

在年龄递减情形下,将虚拟寿命这一概念引进融入到模型中：对任意给定的运行时间t,存在一个与之相关的系统的虚拟寿命,此时失效强度由虚拟寿命决定而不是系统实际运行时间。虚拟寿命是与运行时间和维修次数相关的函数,其基本想法是通过减少系统真实运行时间所得到的虚拟寿命去模拟失效强度函数。根据Kijima的定义,存在两种类型的虚拟寿命：

Kijima模型1：Kijima模型1假设第n次维修可

收稿日期：2016-06-19
基金项目：(国库项目)2016年度专题研究资助项目(A0920502051604-5)；中国铁路总公司科技研究开发计划资助项目(2013J006-B)

以消除从第 $n-1$ 次失效到第 n 次失效过程中对系统的影响，因此会部分减少系统虚拟寿命从 x_n 到 qx_n。由此，第 n 次维修后系统的虚拟寿命就变为

$$v_n = v_{n-1} + qx_n \tag{1}$$

或者，

$$v_n = q(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = qt_n \tag{2}$$

其中 x_i 是系统第 $i-1$ 次失效到第 i 次失效的时间间隔，t_n 是第 n 次失效发生时系统的运行时间，q 是模型参数，代表第 n 次维修的程度。

Kijima 模型 2：这个模型假设第 n 次维修会同时消除当前和先前的失效影响，也即是说第 n 次维修会修改系统包含当前维修时刻的虚拟寿命，即是 $v_{n-1}+x_n$。因此

$$v_n = q(v_{n-1} + x_n) \tag{3}$$

也即是说

$$v_n = q(q^{n-1}v_1 + q^{n-2}v_2 + \cdots + x_n) \tag{4}$$

其中 q 可以被当作是一个常数，尽管每次维修程度都可能不一样。

将虚拟寿命结合到幂函数作为失效率函数去描述系统的失效过程曾被 Gasmi 等[14] 和 Yanez 等[15] 讨论过。文献[13]发展了一种更为广义的不完全维修模型，用维修效率 $Z(t_n)$ 代替 q，因此虚拟寿命可用式(5)或式(6)进行描述：

$$v_n = v_{n-1} + (1 - Z(t_n))x_n \tag{5}$$

$$v_n = (1 - Z(t_n))(v_{n-1} + x_n) \tag{6}$$

其中 $Z(t_n) = \exp(-et^c)$，是依赖于时间的维修效率。

下面讨论如何将虚拟寿命与对数线性模型相结合去分析每次维修程度 q 不为常数的情形中，即文献[13]提出的一种更为广义的不完全维修模型，相应的建模过程和参数估计将会在下面的章节中详细讨论，并给出相应的案例分析。与其他大多数模型相似，这里的维修时间假设可以忽略不计。

2 模型的构建及参数估计

对数线性模型是与 COX[5] 提出的著名的比例风险模型相关的，假设失效强度有下面这种形式：

$$\lambda(t) = e^{\theta' z(t)} \tag{7}$$

其中 $z(t) = (z_1(t), \cdots, z_p(t))'$ 是一个与时间 t 有关的向量函数，通常它表示系统在时刻 t 的运行状况；$\theta' = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p)'$ 是待估计的模型参数。如果运行状况是连续的且失效率可以由时间 t 按照简单线性的方式进行模拟，那么式(7)就变成

$$\lambda(t) = e^{a+bt} \tag{8}$$

文中，将使用式(8)作为论证的基本模型，在式(8)中，时间 t 是系统累积运行时间。如果维修是最小修，t 就是系统的年龄，可以直接使用式(8)得到系统在时刻 t 处的失效强度。如果维修假设是不完全的，需要使用虚拟寿命 $v(t)$ 对应到式(8)中的系统在 t 时刻的寿命，$v(t)$ 通过下面这个式子得以计算：

$$v(t) = v_n + (t - t_n) \tag{9}$$

其中 $v(t)$ 是系统在 t 时刻之前最后一次维修后系统的虚拟寿命；t_n 是系统在 t 时刻之前系统最后一次失效的时刻。使用 $v(t)$ 去替代式(8)中的 t，可以得到：

$$\lambda(t) = e^{a+b\times v(t)} \tag{10}$$

此时可以看到，在这个带有虚拟寿命的对数线性模型中有 3 个参数，分别是：a，b，c，将后面部分使用极大似然估计去估计它们。设系统从第 $i-1$ 次失效到第 i 次失效所花费的时间为 x_i，为简单起见，假设第一次维修采取最小修，那么系统的虚拟寿命 $v(t)$ 和系统的运行时间 t 相同，于是可得与 x_i 相关的失效分布为

$$P(X_i \le x_i \mid T_i > t_{i-1}) = P(T_i \le t_i \mid T_i > t_{i-1}) = \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{1 - F(t_i)} \tag{11}$$

$F(t_i)$ 是第 i 次失效时系统的累积失效时间的累积分布函数，可以通过下面的式子得到：

$$F(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t} = 1 - e^{-\int_0^t e^{a+bt}dt} = 1 - e^{-\frac{1}{b}e^{a}(e^{bt}-1)} \tag{12}$$

关于这种情形的不完全维修，方程(11)中的失效时间 t_i 由系统相应的年龄 v_i 替换，因此 x_i 的失效分布就变为

$$P(X_i \le x_i \mid T_i > t_{i-1}) = P(T_i \le t_i \mid T_i > t_{i-1}) = \frac{F(x_i + v_{i-1}) - F(v_{i-1})}{1 - F(v_{i-1})} \tag{13}$$

对(11)式关于 x_i 求偏导，可以得到关于 x_i 的条件概率密度函数：

$$f(x_i \mid v_{i-1}) = e^{a+bv_{i-1}+bx_i-\frac{1}{b}(e^{a+bv_{i-1}+bx_i}-e^{a+bv_{i-1}-1})} \tag{14}$$

其中 v_{i-1} 可以通过式(5)或式(6)得以计算。一旦关于每个观察到的失效时间的分布函数被获得之后，这个似然函数就可以利用下式计算：

$$L(data \mid a,b,q) = f(x_1)f(x_2 \mid v_1)f(x_3 \mid v_2)\cdots f(x_n \mid v_{n-1})R(T \mid v_n) \tag{15}$$

其中 T 是系统测试或运行的最终时间且满足：

$$R(T \mid v_n) = \frac{R(v_t + T - t_n)}{R(v_n)} = e^{-\frac{1}{b}(e^{a+bv_n+bT-bt_n}-e^{a+bv_n})}$$

对式(15)取对数变换可得:

$$Ln(L)=\sum_{i=1}^{n}\left[a+bv_{i-1}+bx_i-\frac{1}{b}\left(e^{a+bv_{i-1}+bx_i}-e^{a+bv_{i-1}}\right)\right]-\frac{1}{b}\left(e^{a+bv_n+bT-bt_n}-e^{a+bv_n}\right) \tag{16}$$

在最大化对数似然函数的前提下,式(7)可用于解决参数 a、b 和 c 的估计问题。

3　算例分析

一旦模型中的参数被获得,可以使用它们去预测系统在任一给定时刻 T 的失效数和失效强度。在最小修情形下,系统的年龄与系统的运行时间相同,在 T 时刻系统的失效次数存在,它是:

$$N(T)=\int_0^T\lambda(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T e^{a+bt}\mathrm{d}t=\frac{1}{b}e^{a}(e^{bT}-1) \tag{18}$$

然而,对于不完全维修,不存在类似的等式去计算失效数,这是因为 $\lambda(t)$ 不再是一个连续的函数,正如式(10)所示 $\lambda(t)$ 是由在 t 时刻的虚拟寿命 $v(t)$ 决定。从式(2)、(4)、(9),不难看出为了得到虚拟寿命 $v(t)$,需要知道在时刻 t 之前系统每次失效的确切时间。然而,对于一个给定的未来时刻 t 这将变得不可能,这是由于未来失效尚未发生。但如果假设系统失效行为由失效和维修来表现,可以用模拟的办法来预测,这个用于模拟的模型是从失效数据中建立出来的。根据这种模拟的方法,可以计算出预期失效数和预期的 t 时刻的虚拟寿命。相应模拟流程如图 1 所示。

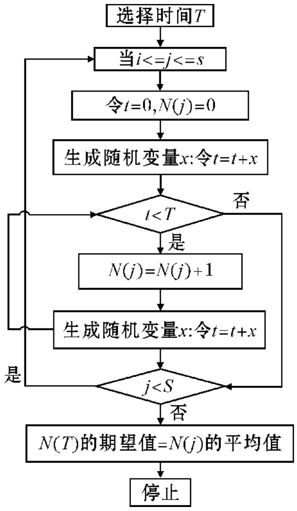

图 1　模拟流程图来得到预期失效数

在图 1 中 S 是仿真次数。使用模拟的方法来预测是通过下面的方法来进行的,从每次模拟来看,模拟的失效数和在时刻 T 的虚拟寿命需要被获得,这个预期的失效数 $N(T)$ 是 S 次模拟运行得到的失效数 $N(T)$ 的平均值。使用虚拟寿命 $v(T)$,时刻 t 的预期的失效数可以得以计算。

假设系统的失效时间见表 1。

表 1　失效时间数据/h

失效时间	失效时间	失效时间
3444	12818	18131
5036	13212	19651
5260	15649	19703
5791	15683	22756
7604	16050	23093
8055	17045	24603
8493	17701	24953
9756	17882	25290

结合对数线性函数,使用两个模型来拟合数据:一个是带有最小修的普通对数线性模型;另一个是带有 kijima2 型虚拟寿命的对数线性模型,相应的结果见表 2。

表 2　对数线性模型的参数

参数	对数线性模型(最小修)	对数线性模型(不完全维修)
a	-7.46507	-8.67253
b	0.000034	0.000324
c	-	0.74536
对数似然值	-190.931	-187.524

表 2 中的对数似然值可以用来检测参数 c 是否有意义,如果参数 c 没有意义,统计量将近似的服从一个卡方分布:

$$LR=-2(\ln L_0-\ln L_1)\sim\chi_1^2 \tag{17}$$

其中 $\ln L_0$ 和 $\ln L_1$ 是最小修情形下和不完全维修情形下的对数似然值。使用表 2 中的数值可以得到 $LR=6.814$,LR 对应的 P 值介于 0.025 与 0.05 之间,因此参数 c 在 0.05 显著性水平下是有意义的。

利用这个模拟的参数(模拟次数为 5000),可以计算出在任一给定的时刻 t 处系统的预期失效数。

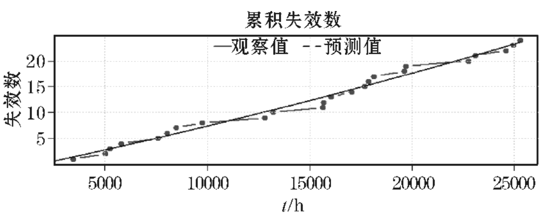

图 2　失效数 $N(T)$

4 结束语

讨论了如何将虚拟寿命这一想法与对数线性函数相融合去模拟一类不完全维修情形下可修系统的失效过程。通过详细论证得出,在失效数和维修的信息可以获得时,该模型才是有用的。

致谢:感谢成都铁路局科技研究开发计划课题(CX1304)对本文的资助

参考文献:

[1] Jiang Yun-peng, Chen Mao-yin, Zhou Dong-hua. Joint optimization of preventive maintenance and inventory policies for muti-unit systems subject to deteriorating spare part inventory[J]. Journal of Manufacturing Systems,2015,35:191-205.

[2] Michael Jong Kim,Viliam Makis,. Joint optimization of sampling and control of partially observable failing systems[J]. Operations Research,2013,61(3).

[3] Byon E,Ntaimo L,Ding Y. Operation maintenance strategies for wind turbine systems under stochastic weather conditions[J]. IEEE Transactions on Reliability,2010,59(2):393-404.

[4] 王小林,程志君,郭波,郭驰名. 基于冲击模型劣化系统的不完全维修决策[J]. 系统工程理论与实践,2011,31:2380-2386.

[5] Cox D. R. The statistical analysis of dependencies in point processes, in Stochastic Point Processes [M]. New York:John Wiley,1972:55-66.

[6] Guo H,Liao H,Zhao W, et al. A new stochastic model for systems under general repairs[J]. IEEE Transactions on Reliability,2007,56:40-49.

[7] Pulcini G. A bounded intensity process for the reliability of repairable equipment [J]. Journal of Quality Technology,2001,33:480-492.

[8] Pham H,Wang H Z. Imperfect maintenance[J]. European Journal of Operational Research,1996, 94(3):425-438.

[9] 曹晋华,程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京:科学出版社,2005.

[10] 程侃. 寿命分不类与可靠性数学理论[M]. 北京:科学出版社,1999.

[11] Lawless J F,Thiagarajah K. A point-process model incorporating renewals and time trends, with application to repairable systems[J]. Technometics,1996,38:131-138.

[12] Kijima M. Some results for repairable systems with general repair[J]. Journal of Applied Probability,1989,26:89-102.

[13] Monika Tanwar,Rajiv N. Rai,Nomesh Bolia. Imperfect repair modeling using Kijima type generalized Renewal process[J]. Reliability Engineering and System Safety,2014,124:24-31.

[14] Gasmi S,Love C E,Kahle W. A general repair, proportional-hazards,framework to model complex repairable systems[J]. IEEE Transactions on Reliability,2003,52:26-32.

[15] Yanez M, Joglar F, Modarres M. Generalized renewal process for analysis of repairable systems with limited failure experience[J]. Reliability Engineering and System Safety,2002,77:167-180.

A Generalized Imperfect Maintenance Case System Failure Process Analysis

GAN Cheng-wang, WU Lan-yao, LIU Yang

(Southwest Jiaotong University,School of Mathematics,Chengdu 611756,China)

Abstract:In the practical work,the system cannot be renewedbyrepairing,making it difficult to give the failure process of the system aperfectdescription. In 1989,Kijima proposes a concept related to time and the number of maintenance, which is called virtual life. The use of the concept of virtual lifemade the failure strength determined by the virtual life rather thanthe time of system operation. The basic idea is to simulate failure intensity functionofthe systemby reducing the real operationtime of the system. In the paper, how tocombinethe virtual life the idea and the integration of logarithm linear function to simulate a generalized imperfect maintenance situation of the failure process of the repairable systemis discussed, and the corresponding parameter estimation and model application are discussed in detail.

Keywords:probability and mathematical statistics; reliability theory; virtual life; logarithm linear model; maximum likelihood estimation; imperfect maintenance