

复矩阵方程的复全局 QMR 算法

王茂晓, 李胜坤

(成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225)

摘要:研究复矩阵方程的全局 krylov 子空间算法。以复矩阵的实内积为工具, 提出一种复全局 M -双正交化过程。基于该过程, 得到一种新的复全局 QMR 算法求解复矩阵方程。数值算例表明该算法比现有的算法更有效。

关键词:复矩阵方程; 实内积; 全局 M -双正交化过程; 全局 QMR 算法

中图分类号: O241.6

文献标志码: A

doi: 10.16836/j.cnki.jcuit.2020.02.018

0 引言

复矩阵方程在控制理论、计算电磁学以及一些应用数学领域中有重要应用。一个典型的例子是用中心差分离散二维复 Helmholtz 方程时需要求解复 Sylvester 矩阵方程 $AX + XB = C$ ^[1]。在求解结构特征值问题时会遇到矩阵方程 $AX + X^T B = C$ 或者 $AX + X^H B = C$ 的求解^[2]。另外, 矩阵方程 $AX + \bar{X}B = C$ 的解与矩阵 A 和 B 的一致性紧密相关^[3]。

目前, 实矩阵方程的数值解法较多, 比如块 Krylov 子空间方法^[4-6], 全局 Krylov 子空间方法^[7-13], 矩阵形式的 LSQR 方法等^[14]。但是对于复矩阵方程而言, 相应的数值解法很少。最近, 吴爱国等^[15]提出用广义的 GI 算法 (EGI) 和广义的 CGNE 算法 (ECGNE)^[16] 求解复矩阵方程, 但是这两种算法在很多数值实验中收敛速度较慢, 特别是 EGI 方法。另一种处理方式是分别考虑复矩阵方程的实部与虚部, 把问题转化为求解两个同阶的实矩阵方程, 就可利用实矩阵方程的迭代方法进行处理, 但是增加计算量。因此, 构造高效的数值解法来求解复矩阵方程显得特别重要。

考虑如下复矩阵方程

$$\sum_{i=1}^{P_1} A_i X B_i + \sum_{j=1}^{P_2} C_j X^T D_j + \sum_{k=1}^{P_3} E_k \bar{X} F_k + \sum_{l=1}^{P_4} M_l X^H N_l = G \quad (1)$$

的数值解法, 其中 $A_i, B_i, C_j, D_j, E_k, F_k, M_l, N_l, G \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为给定的系数矩阵。该方程包含了上述所有矩阵方程作为其特殊例子。为避免复矩阵方程的实转化, 提出一种能直接求解方程 (1) 的复全局 QMR 方法。该方法的最大特点是以一种新型的复全局 M -双正交化过程为基础, 并且引入了复矩阵的实内积。

对给定的两个复矩阵 $X, Y \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 定义实内积为 $\langle X, Y \rangle_F = \text{Re} [\text{tr}(X^H Y)]$, 即为 $X^H Y$ 的迹的实部^[17]。相应的范数为 $\|X\|_F = \sqrt{\langle X, X \rangle_F} = \sqrt{\text{Re} [\text{tr}(X^H X)]}$ 。实内积的使用避免了复全局 M -双正交化过程产生复系数, 并且该内积满足可交换性, 即 $\langle X, Y \rangle_F = \langle Y, X \rangle_F$, 这在一定程度上为计算提供了方便。另外, 符号 $X \otimes Y$ 表示矩阵 X 和 Y 的 Kronecker 积。

为叙述方便, 引入算子

$$M: X \rightarrow \sum_{i=1}^{P_1} A_i X B_i + \sum_{j=1}^{P_2} C_j X^T D_j + \sum_{k=1}^{P_3} E_k \bar{X} F_k + \sum_{l=1}^{P_4} M_l X^H N_l$$

即方程 (1) 转化为

$$M(X) = G \quad (2)$$

相应的对偶算子定义为

$$M^*: X \rightarrow \sum_{i=1}^{P_1} (A_i)^H X (B_i)^H + \sum_{j=1}^{P_2} \overline{D_j} X^T \overline{C_j} + \sum_{k=1}^{P_3} E_k^T \bar{X} F_k^T + \sum_{l=1}^{P_4} N_l X^H M_l$$

1 复全局 M -双正交化过程

首先介绍一种新的矩阵积符号, 即 \diamond_F 积, 并给出一些性质。

定义 1^[18]: 令 $A = [A_1, A_2, \dots, A_p] \in \mathbb{C}^{n \times ps}$, $B = [B_1, B_2, \dots, B_l] \in \mathbb{C}^{n \times ls}$, 其中 $A_i, B_j \in \mathbb{C}^{n \times s}$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, l$), 则 $p \times l$ 矩阵 $A^H \diamond_F B$ 定义如下:

$$A^H \diamond_F B = \begin{pmatrix} \langle A_1, B_1 \rangle_F & \langle A_1, B_2 \rangle_F & \cdots & \langle A_1, B_l \rangle_F \\ \langle A_2, B_1 \rangle_F & \langle A_2, B_2 \rangle_F & \cdots & \langle A_2, B_l \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_p, B_1 \rangle_F & \langle A_p, B_2 \rangle_F & \cdots & \langle A_p, B_l \rangle_F \end{pmatrix}$$

通过一些简单的推导, 可以得到如下性质:

性质 1 令 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times ps}$, $L \in \mathbb{R}^{p \times p}$, 则有

$$(1) \quad M(A)^H \diamond_F B = A^H \diamond_F M^*(B);$$

$$(2) \quad (M(A)^H \diamond_F B)^T = B^H \diamond_F M(A);$$

$$(3) \mathbf{M}(\mathbf{A})^H \diamond_F (\mathbf{B}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_s)) = (\mathbf{M}(\mathbf{A})^H \diamond_F \mathbf{B}) \mathbf{L}.$$

设 $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 定义如下两个复矩阵 Krylov 子空间

$$\mathbf{K}_m(\mathbf{M}, \mathbf{V}) = \text{span} \{ \mathbf{V}, \mathbf{M}(\mathbf{V}), \dots, \mathbf{M}^{m-1}(\mathbf{V}) \},$$

$$\mathbf{L}_m(\mathbf{M}^*, \mathbf{W}) = \text{span} \{ \mathbf{W}, \mathbf{M}^*(\mathbf{W}), \dots, (\mathbf{M}^*)^{m-1}(\mathbf{W}) \}.$$

下面给出一种复全局 \mathbf{M} -双正交化过程来构造 $\mathbf{K}_m(\mathbf{M}, \mathbf{V}_1)$ 和 $\mathbf{L}_m(\mathbf{M}^*, \mathbf{W}_1)$ 的 \mathbf{M} -双正交化基, 其中 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{W}_1 满足一定的条件。

算法1 复全局 \mathbf{M} -双正交化过程

(1) 选取矩阵 $\mathbf{V}_1, \mathbf{W}_1$, 使得 $\langle \mathbf{W}_1, \mathbf{M}(\mathbf{V}_1) \rangle_F = 1$;

(2) 令 $\beta_1 = \delta_1 = 0, \mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_0 = 0$;

(3) 对 $j=1, 2, \dots, m$ 计算;

(4) $\alpha_j = \langle \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_j), \mathbf{M}(\mathbf{V}_j) \rangle_F$;

(5) $\hat{\mathbf{V}}_{j+1} = \mathbf{M}(\mathbf{V}_j) - \alpha_j \mathbf{V}_j - \beta_j \mathbf{V}_{j-1}$;

(6) $\hat{\mathbf{W}}_{j+1} = \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_j) - \alpha_j \mathbf{W}_j - \delta_j \mathbf{W}_{j-1}$;

(7) $\delta_{j+1} = |\langle \hat{\mathbf{W}}_{j+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{j+1}) \rangle_F|^{\frac{1}{2}}$. 若 $\delta_{j+1} = 0$, 停止;

(8) $\beta_{j+1} = \frac{\langle \hat{\mathbf{W}}_{j+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{j+1}) \rangle_F}{\delta_{j+1}}$;

(9) $\mathbf{V}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{V}}_{j+1}}{\delta_{j+1}}$;

(10) $\mathbf{W}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{W}}_{j+1}}{\beta_{j+1}}$;

(11) 结束。

在算法1的第7步, 如果 $\delta_{j+1} = 0$ 会引起算法的崩溃, 可采用前瞻技术进行处理^[19], 不作深入讨论。假设算法1在 m 步之前都不会发生中断。令 $\mathbf{V}_m = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m]$, $\mathbf{W}_m = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_m]$ 及三对角实矩阵 \mathbf{T}_m 为

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \delta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \delta_{m-1} & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ & & & \delta_m & \alpha_m \end{pmatrix},$$

$\alpha_j, \beta_j, \delta_j \in \mathbb{R} (j=1, \dots, m)$,

有如下结论。

定理1 若算法1进行 m 步, 则产生的矩阵 $\mathbf{V}_i (i=1, \dots, m)$, $\mathbf{W}_j (j=1, \dots, m)$ 构成一个 \mathbf{M} -双正交化系统, 即

$$\mathbf{W}_m^H \diamond_F \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) = \mathbf{I}_m, \quad (3)$$

且满足如下关系

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_m) = \mathbf{V}_m (\mathbf{T}_m \otimes \mathbf{I}_n) + \delta_{m+1} \mathbf{V}_{m+1} (\mathbf{e}_m^T \otimes \mathbf{I}_n), \quad (4)$$

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{W}_m) = \mathbf{W}_m (\mathbf{T}_m^T \otimes \mathbf{I}_n) + \beta_{m+1} \mathbf{W}_{m+1} (\mathbf{e}_m^T \otimes \mathbf{I}_n), \quad (5)$$

$$\mathbf{W}_m^H \diamond_F \mathbf{M}^2(\mathbf{V}_m) = \mathbf{T}_m \quad (6)$$

证明 证明过程与文献[20-21]相似, 故省略。

2 复全局 QMR 算法

根据复全局 \mathbf{M} -双正交化过程, 有

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_m) = \mathbf{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \otimes \mathbf{I}_n), \quad \tilde{\mathbf{T}}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_m \\ \delta_{m+1} \mathbf{e}_m^T \end{pmatrix}$$

令 $\beta = \|\mathbf{R}_0\|_F$, $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{R}_0}{\beta}$, 则第 m 步的近似解可表示为

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^m y_m^{(i)} \mathbf{V}_i = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_m (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n),$$

其中 $\mathbf{y}_m = (y_m^{(1)}, y_m^{(2)}, \dots, y_m^{(m)})^T \in \mathbb{R}^m$ 。相应的残差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= \mathbf{G} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_m) \\ &= \mathbf{G} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_m (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n)) \\ &= \mathbf{R}_0 - \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n) \\ &= \mathbf{R}_0 - \mathbf{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n) \\ &= \mathbf{V}_{m+1} (\beta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{I}_n) - \mathbf{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n) \\ &= \mathbf{V}_{m+1} ((\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m) \otimes \mathbf{I}_n) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ 。从而残差矩阵的范数可表示为

$$\|\mathbf{R}_m\|_F = \|\mathbf{V}_{m+1} ((\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m) \otimes \mathbf{I}_n)\|_F \quad (7)$$

通常采用极小化 $\|\mathbf{R}_m\|_F$ 来计算 \mathbf{y}_m , 但因 \mathbf{V}_{m+1} 通常情况下不是正交的, 极小化 $\|\mathbf{R}_m\|_F$ 比较复杂。因而一般采用极小化 $\|\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m\|_2$ 来计算 \mathbf{y}_m , 相应的方法称为 QMR 方法。对该极小化问题的求解, 可采用吉文斯旋转变换来计算, 得到如下的复全局 QMR 算法, 具体细节可参考文献[22]。

算法2 复全局 QMR 算法 (CGI-QMR)

(1) 选取 \mathbf{X}_0 , 计算 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{G} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_0)$ 。令 $g_1 = \|\mathbf{R}_0\|_F$;

(2) 令 $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{R}_0}{g_1}$, 选取 \mathbf{W}_1 , 使 $\langle \mathbf{W}_1, \mathbf{M}(\mathbf{V}_1) \rangle_F = 1$,

(比如 $\mathbf{W}_1 = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{V}_1)}{\|\mathbf{M}(\mathbf{V}_1)\|_F^2}$);

(3) 令 $t_{01} = t_{10} = 0, \mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_0 = 0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$;

(4) 对 $m=1, 2, \dots$ 计算;

(5) $t_{m,m} = \langle \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_m), \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) \rangle_F$;

(6) $\hat{\mathbf{V}}_{m+1} = \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) - t_{m,m} \mathbf{V}_m - t_{m-1,m} \mathbf{V}_{m-1}$;

(7) $\hat{\mathbf{W}}_{m+1} = \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_m) - t_{m,m} \mathbf{W}_m - t_{m-1,m} \mathbf{W}_{m-1}$;

(8) $t_{m+1,m} = \sqrt{|\langle \hat{\mathbf{W}}_{m+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{m+1}) \rangle_F|}$;

(9) $t_{m,m+1} = \frac{\langle \hat{\mathbf{W}}_{m+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{m+1}) \rangle_F}{t_{m+1,m}}$;

(10) $\mathbf{V}_{m+1} = \frac{\hat{\mathbf{V}}_{m+1}}{t_{m+1,m}}$;

(11) $\mathbf{W}_{m+1} = \frac{\hat{\mathbf{W}}_{m+1}}{t_{m,m+1}}$;

- (12) 对 $i=\max\{1,m-2\},\cdots,m-1$, 计算 $t_{i,m}=c_it_{i,m}+s_it_{i+1,m}$, $t_{i+1,m}=-s_it_{i,m}+c_it_{i+1,m}$;
- (13) $c_m=\frac{t_{m,m}}{\sqrt{t_{m,m}^2+t_{m+1,m}^2}},s_m=\frac{t_{m+1,m}}{\sqrt{t_{m,m}^2+t_{m+1,m}^2}}$;
- (14) $t_{m,m}=c_mt_{m,m}+s_mt_{m+1,m}$;
- (15) $t_{m+1,m}=0$;
- (16) $g_m=c_mg_m,s_{m+1}=-s_mg_m$;
- (17) $P_m=\frac{V_m-t_{m-2,m}P_{m-2}-t_{m-1,m}P_{m-1}}{t_{m,m}}$;
- (18) $X_m=X_{m-1}+g_mP_m$;
- (19) 如果 $|g_{m+1}|$ 足够小, 则停止;
- (20) 结束。
- 给出复全局 QMR 算法的残差估计。

定理 2 由算法 2 得到的近似解 X_m 的残差矩阵满足如下关系:

$\|R_m\|_F\leq\|V_{m+1}\|_F|s_1s_2\cdots s_m|\|R_0\|_F$

证明 根据式(7)有, $\|R_m\|_F\leq\|V_{m+1}\|_F\|\beta\bar{e}_1-\tilde{T}_my_m\|_2$ 。又因 $\|\beta\bar{e}_1-\tilde{T}_my_m\|_2=\min_y\|\beta\bar{e}_1-\tilde{T}_my\|_2=|g_{m+1}|$, 且 $g_{m+1}=-s_mg_m=(-1)^ms_1s_2\cdots s_mg_1$ 。故定理得证。

3 数值算例

下面给出两个数值算例来说明复全局 QMR 算法

的有效性, 并且与广义的 CGNE 方法^[16]在迭代步数(IT)和计算时间(CPU,单位秒)方面进行比较。所有测试都是用 Matlab2013a 编程, 并在处理器为 i7-7700HQ 2.80 GHz CPU 和 8.00 GB 内存的笔记本电脑上运行。在所有的数值算例中, 初值 X_0 选为零矩阵, 停止迭代条件为 $\|R_m\|_F\leq 10^{-7}$ 。

例 1 计算复 Sylvester 矩阵方程 $AX+XB=C$, 其中 $A=T_n-\sigma_1h^2I_n, B=T_n+i\sigma_2h^2I_n, T_n=tridiag(-1,2,-1), h=\frac{1}{n+1}$ 。

该问题来源于中心差分离散二维 Helmholtz 方程 $-\Delta u-\sigma_1u+i\sigma_2u=f(x,y)^{[1]}$ 。矩阵 C 的选取使得精确解为 $X=tridiag(-1,2i,1)$ 。计算结果见表 1 和图 1。

表 1 例 1 的数值结果			
矩阵阶数	算法	迭代次数	CPU/s
n=50	ECGNE	812	0.277
	CGI-QMR	196	0.175
n=100	ECGNE	2957	3.768
	CGI-QMR	381	1.077
n=150	ECGNE	6480	23.947
	CGI-QMR	555	4.632
n=200	ECGNE	11404	91.491
	CGI-QMR	732	12.300

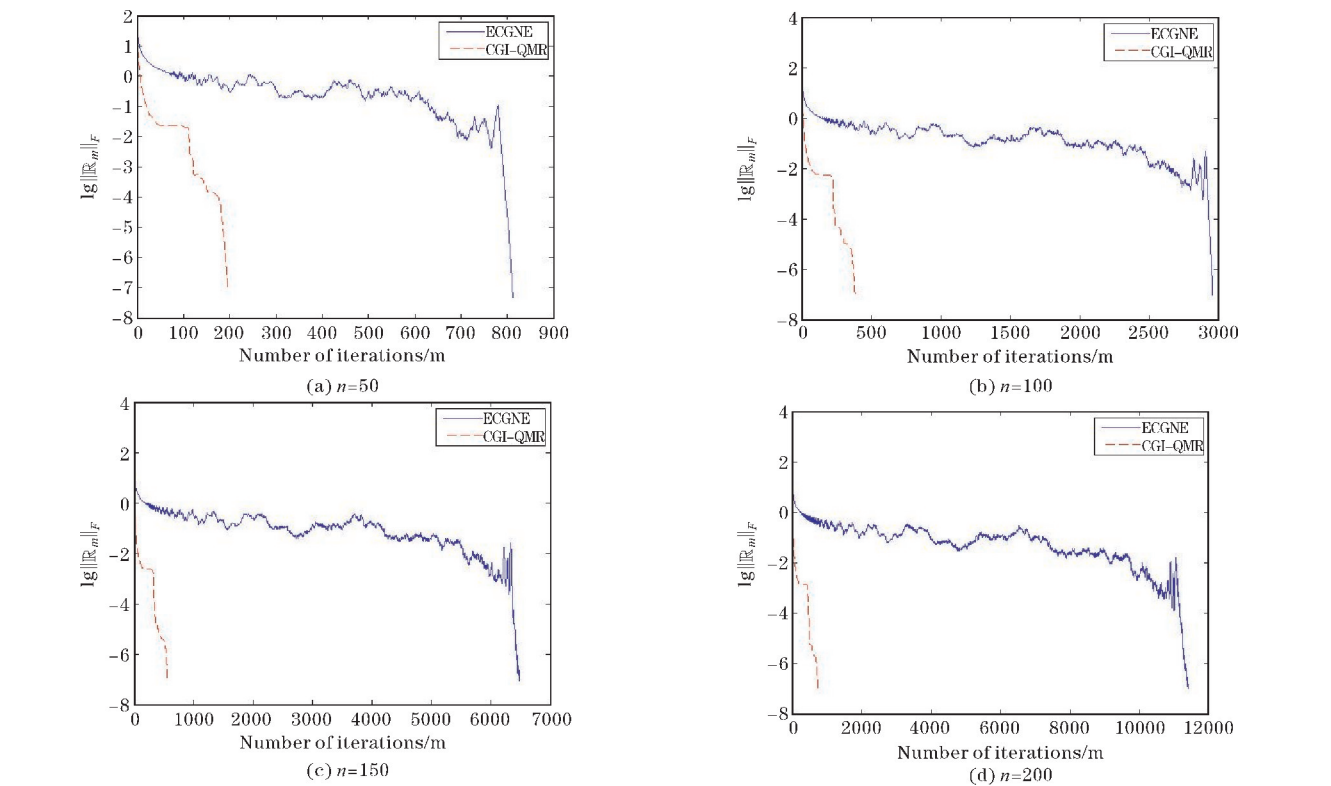


图 1 例 1 的收敛曲线

由表 1 可以看出,在给定相同的停止迭代条件下,复全局 QMR 算法比广义 CGNE 方法需要更少的迭代步数和计算时间。同时,图 1 表明复全局 QMR 算法的收敛曲线更光滑。

例 2 计算共轭 Sylvester 矩阵方程 $AX+\bar{X}B=C$, 其中 $A=tridiag(-1,2-i,-1)$, $B=tridiag(-1,1+i,-1)$, 矩阵 C 的选取使得精确解为 $X=tridiag(1,i,1)$ 。

计算结果见表 2 和图 2。从表 2 和图 2 可以看出,相比广义 CGNE 方法,复全局 QMR 算法在迭代步数和计算时间上都占有一定的优势。

表 2 例 2 的数值结果			
矩阵阶数	算法	迭代次数	CPU/s
$n=50$	ECGNE	338	0.128
	CGI-QMR	93	0.080
$n=100$	ECGNE	698	1.002
	CGI-QMR	177	0.565
$n=150$	ECGNE	1029	4.384
	CGI-QMR	291	2.607
$n=200$	ECGNE	1354	11.944
	CGI-QMR	379	7.199

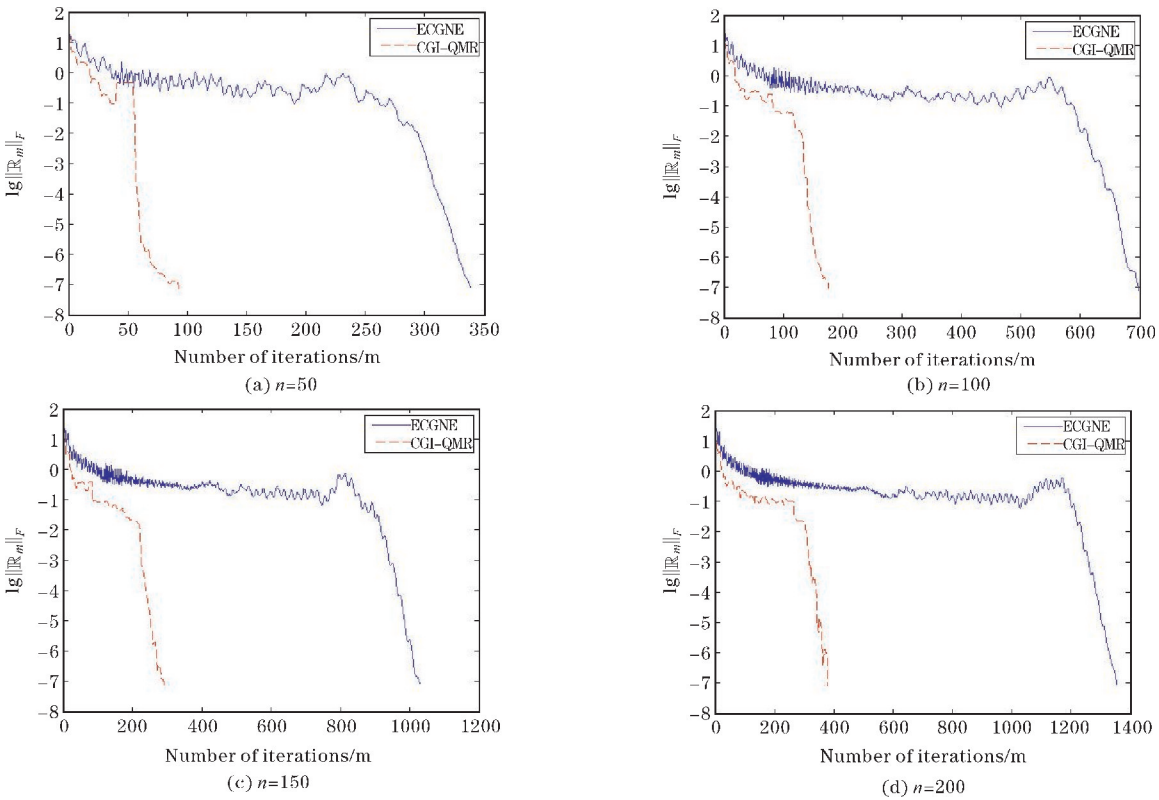


图 2 例 2 的收敛曲线

4 结束语

基于复全局 M -双正交化过程提出一种复全局 QMR 算法求解复矩阵方程,给出了残差估计。该方法能够直接求解复矩阵方程而不需要进行复矩阵的实转化。数值例子验证了新方法的有效性。

参考文献:

[1] L D Liao, G F Zhang. Preconditioning of complex linear systems from the Helmholtz equation [J]. Comput. Math. Appl. ,2016,72:2473–2485.
[2] D Kressner, C Schröder, D S Watkins. Implicit QR

algorithms for palindromic and even eigenvalue problems[J]. Numer. Algor. ,2009,51:209–238.
[3] J H Bevis, F J Hall, R E Hartwig. The matrix equation $AX+\bar{X}B=C$ and its special cases[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl. ,1988,9:348–359.
[4] V Simoncini, On the numerical solution of $AX-XB=C$ [J]. BIT,1996,36:814–830.
[5] M Robbe, M Sadkane. A convergence analysis of GMRES and FOM methods for Sylvester equations [J]. Numer. Algor. ,2002,30:71–89.
[6] A El Guennouni, K Jbilou, A J Riquet. Block Krylov subspace methods for solving large Sylvester equations[J]. Numer. Algor. ,2002,29:75–96.
[7] K Jbilou. Low rank approximate solutions to large

- Sylvester matrix equations [J]. Appl. Math. Comput., 2006, 177: 365–376.
- [8] L Bao, Y Q Lin, Y M Wei. A new projection method for solving large Sylvester equations [J]. Appl. Numer. Math., 2007, 57: 521–532.
- [9] A Bouhamidi K Jbilou. A note on the numerical approximate solutions for generalized Sylvester matrix equations with applications [J]. Appl. Math. Comput., 2008, 206: 687–694.
- [10] F P A Beik D K Salkuyeh. On the global Krylov subspace methods for solving general coupled matrix equations [J]. Comput. Math. Appl., 2011, 62: 4605–4613.
- [11] F P A Beik. Theoretical results on the global GMRES method for solving generalized Sylvester matrix equations [J]. Bull. Iranian Math. Soc., 2014, 40: 1097–1117.
- [12] A Kaabi. On the numerical solution of generalized Sylvester matrix equations [J]. Bull. Iranian Math. Soc., 2014, 40: 101–113.
- [13] M Heyouni, F. Saberi-Movahed, A Tajaddini. On global Hessenberg based methods for solving Sylvester matrix equations [J]. Comput. Math. Appl. 2019, 77: 77–92.
- [14] S K Li T Z Huang. LSQR iterative method for generalized coupled Sylvester matrix equations [J]. Appl. Math. Model., 2012, 36: 3545–3554.
- [15] A G Wu, L L Lv, G R Duan. Iterative algorithms for solving a class of complex conjugate and transpose matrix equations [J]. Appl. Math. Comput., 2011, 217: 8343–8353.
- [16] A G Wu, G Feng, G R Duan, et al. Finite iterative solutions to a class of complex matrix equations with conjugate and transpose of the unknowns [J]. Math. Comput. Model., 2010, 52: 1463–1478.
- [17] L J Zhao, X Y Hu, L Zhang. Linear restriction problem of Hermitian reflexive matrices and its approximation [J]. Appl. Math. Comput., 2008, 200: 341–351.
- [18] R Bouyouli, K Jbilou, R. Sadaka, et al. Convergence properties of some block Krylov subspace methods for multiple linear systems [J]. J Comput. Appl. Math., 2006, 196: 498–511.
- [19] K Jbilou, H. Sadok, A Tinzefte Oblique projection methods for linear systems with multiple right-hand sides [J]. Electron. T. Numer. Ana., 2005, 20: 119–138.
- [20] Y F Jing, T Z Huang, Y Zhang, et al. Lanczos-type variants of the COCR method for complex nonsymmetric linear systems [J]. J. Comput. Phys., 2009, 228: 6376–6394.
- [21] B Carpentieri, Y F Jing, T Z Huang. The BiCOR and CORS iterative algorithms for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM J. Sci. Comput., 2011, 33: 3020–3036.
- [22] R W Freund N M Nachtigal. QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems [J]. Numer. Math., 1991, 60: 315–339.

Complex Global QMR Algorithm for the Complex Matrix Equations

WANG Maoxiao, LI Shengkun

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: In this paper, we study the global Krylov subspace algorithm for the complex matrix equations. Using the real inner product of complex matrices, a complex global M -biorthogonalization process is proposed. Based on this process, a new complex global QMR algorithm is obtained to solve the complex matrix equations. The numerical examples show that the algorithm is more effective than the existing methods.

Keywords: complex matrix equations; real inner product; global M -biorthogonalization process; global QMR algorithm