

文章编号: 2096-1618(2020)02-0248-05

# 复矩阵方程的复全局 QMR 算法

王茂晓, 李胜坤

(成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225)

**摘要:**研究复矩阵方程的全局 krylov 子空间算法。以复矩阵的实内积为工具, 提出一种复全局  $M$ -双正交化过程。基于该过程, 得到一种新的复全局 QMR 算法求解复矩阵方程。数值算例表明该算法比现有的算法更有效。

**关键词:**复矩阵方程; 实内积; 全局  $M$ -双正交化过程; 全局 QMR 算法

**中图分类号:** O241.6

**文献标志码:** A

**doi:** 10.16836/j.cnki.jcuit.2020.02.018

## 0 引言

复矩阵方程在控制理论、计算电磁学以及一些应用数学领域中有重要应用。一个典型的例子是用中心差分离散二维复 Helmholtz 方程时需要求解复 Sylvester 矩阵方程  $AX + XB = C$ <sup>[1]</sup>。在求解结构特征值问题时会遇到矩阵方程  $AX + X^T B = C$  或者  $AX + X^H B = C$  的求解<sup>[2]</sup>。另外, 矩阵方程  $AX + \bar{X}B = C$  的解与矩阵  $A$  和  $B$  的一致性紧密相关<sup>[3]</sup>。

目前, 实矩阵方程的数值解法较多, 比如块 Krylov 子空间方法<sup>[4-6]</sup>, 全局 Krylov 子空间方法<sup>[7-13]</sup>, 矩阵形式的 LSQR 方法等<sup>[14]</sup>。但是对于复矩阵方程而言, 相应的数值解法很少。最近, 吴爱国等<sup>[15]</sup>提出用广义的 GI 算法 (EGI) 和广义的 CGNE 算法 (ECGNE)<sup>[16]</sup> 求解复矩阵方程, 但是这两种算法在很多数值实验中收敛速度较慢, 特别是 EGI 方法。另一种处理方式是分别考虑复矩阵方程的实部与虚部, 把问题转化为求解两个同阶的实矩阵方程, 就可利用实矩阵方程的迭代方法进行处理, 但是增加计算量。因此, 构造高效的数值解法来求解复矩阵方程显得特别重要。

考虑如下复矩阵方程

$$\sum_{i=1}^{P_1} A_i X B_i + \sum_{j=1}^{P_2} C_j X^T D_j + \sum_{k=1}^{P_3} E_k \bar{X} F_k + \sum_{l=1}^{P_4} M_l X^H N_l = G \quad (1)$$

的数值解法, 其中  $A_i, B_i, C_j, D_j, E_k, F_k, M_l, N_l, G \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为给定的系数矩阵。该方程包含了上述所有矩阵方程作为其特殊例子。为避免复矩阵方程的实转化, 提出一种能直接求解方程 (1) 的复全局 QMR 方法。该方法的最大特点是以一种新型的复全局  $M$ -双正交化过程为基础, 并且引入了复矩阵的实内积。

对给定的两个复矩阵  $X, Y \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 定义实内积为  $\langle X, Y \rangle_F = \text{Re} [\text{tr}(X^H Y)]$ , 即为  $X^H Y$  的迹的实部<sup>[17]</sup>。相应的范数为  $\|X\|_F = \sqrt{\langle X, X \rangle_F} = \sqrt{\text{Re} [\text{tr}(X^H X)]}$ 。实内积的使用避免了复全局  $M$ -双正交化过程产生复系数, 并且该内积满足可交换性, 即  $\langle X, Y \rangle_F = \langle Y, X \rangle_F$ , 这在一定程度上为计算提供了方便。另外, 符号  $X \otimes Y$  表示矩阵  $X$  和  $Y$  的 Kronecker 积。

为叙述方便, 引入算子

$$M: X \rightarrow \sum_{i=1}^{P_1} A_i X B_i + \sum_{j=1}^{P_2} C_j X^T D_j + \sum_{k=1}^{P_3} E_k \bar{X} F_k + \sum_{l=1}^{P_4} M_l X^H N_l$$

即方程 (1) 转化为

$$M(X) = G \quad (2)$$

相应的对偶算子定义为

$$M^*: X \rightarrow \sum_{i=1}^{P_1} (A_i)^H X (B_i)^H + \sum_{j=1}^{P_2} \overline{D_j} X^T \overline{C_j} + \sum_{k=1}^{P_3} E_k^T \bar{X} F_k^T + \sum_{l=1}^{P_4} N_l X^H M_l$$

## 1 复全局 $M$ -双正交化过程

首先介绍一种新的矩阵积符号, 即  $\diamond_F$  积, 并给出一些性质。

**定义 1**<sup>[18]</sup>: 令  $A = [A_1, A_2, \dots, A_p] \in \mathbb{C}^{n \times ps}$ ,  $B = [B_1, B_2, \dots, B_l] \in \mathbb{C}^{n \times ls}$ , 其中  $A_i, B_j \in \mathbb{C}^{n \times s}$  ( $i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, l$ ), 则  $p \times l$  矩阵  $A^H \diamond_F B$  定义如下:

$$A^H \diamond_F B = \begin{pmatrix} \langle A_1, B_1 \rangle_F & \langle A_1, B_2 \rangle_F & \cdots & \langle A_1, B_l \rangle_F \\ \langle A_2, B_1 \rangle_F & \langle A_2, B_2 \rangle_F & \cdots & \langle A_2, B_l \rangle_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle A_p, B_1 \rangle_F & \langle A_p, B_2 \rangle_F & \cdots & \langle A_p, B_l \rangle_F \end{pmatrix}$$

通过一些简单的推导, 可以得到如下性质:

**性质 1** 令  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times ps}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , 则有

$$(1) M(A)^H \diamond_F B = A^H \diamond_F M^*(B);$$

$$(2) (M(A)^H \diamond_F B)^T = B^H \diamond_F M(A);$$

$$(3) \mathbf{M}(\mathbf{A})^H \diamond_F (\mathbf{B}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_s)) = (\mathbf{M}(\mathbf{A})^H \diamond_F \mathbf{B}) \mathbf{L}.$$

设  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 定义如下两个复矩阵 Krylov 子空间

$$\mathbf{K}_m(\mathbf{M}, \mathbf{V}) = \text{span} \{ \mathbf{V}, \mathbf{M}(\mathbf{V}), \dots, \mathbf{M}^{m-1}(\mathbf{V}) \},$$

$$\mathbf{L}_m(\mathbf{M}^*, \mathbf{W}) = \text{span} \{ \mathbf{W}, \mathbf{M}^*(\mathbf{W}), \dots, (\mathbf{M}^*)^{m-1}(\mathbf{W}) \}.$$

下面给出一种复全局  $\mathbf{M}$ -双正交化过程来构造  $\mathbf{K}_m(\mathbf{M}, \mathbf{V}_1)$  和  $\mathbf{L}_m(\mathbf{M}^*, \mathbf{W}_1)$  的  $\mathbf{M}$ -双正交化基, 其中  $\mathbf{V}_1$  和  $\mathbf{W}_1$  满足一定的条件。

算法1 复全局  $\mathbf{M}$ -双正交化过程

- (1) 选取矩阵  $\mathbf{V}_1, \mathbf{W}_1$ , 使得  $\langle \mathbf{W}_1, \mathbf{M}(\mathbf{V}_1) \rangle_F = 1$ ;
- (2) 令  $\beta_1 = \delta_1 = 0, \mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_0 = 0$ ;
- (3) 对  $j=1, 2, \dots, m$  计算;
- (4)  $\alpha_j = \langle \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_j), \mathbf{M}(\mathbf{V}_j) \rangle_F$ ;
- (5)  $\hat{\mathbf{V}}_{j+1} = \mathbf{M}(\mathbf{V}_j) - \alpha_j \mathbf{V}_j - \beta_j \mathbf{V}_{j-1}$ ;
- (6)  $\hat{\mathbf{W}}_{j+1} = \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_j) - \alpha_j \mathbf{W}_j - \delta_j \mathbf{W}_{j-1}$ ;
- (7)  $\delta_{j+1} = |\langle \hat{\mathbf{W}}_{j+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{j+1}) \rangle_F|^{\frac{1}{2}}$ . 若  $\delta_{j+1} = 0$ , 停止;
- (8)  $\beta_{j+1} = \frac{\langle \hat{\mathbf{W}}_{j+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{j+1}) \rangle_F}{\delta_{j+1}}$ ;
- (9)  $\mathbf{V}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{V}}_{j+1}}{\delta_{j+1}}$ ;
- (10)  $\mathbf{W}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{W}}_{j+1}}{\beta_{j+1}}$ ;
- (11) 结束。

在算法1的第7步, 如果  $\delta_{j+1} = 0$  会引起算法的崩溃, 可采用前瞻技术进行处理<sup>[19]</sup>, 不作深入讨论。假设算法1在  $m$  步之前都不会发生中断。令  $\mathbf{V}_m = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_m]$ ,  $\mathbf{W}_m = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_m]$  及三对角实矩阵  $\mathbf{T}_m$  为

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \delta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \delta_{m-1} & \alpha_{m-1} & \beta_m \\ & & & & \delta_m & \alpha_m \end{pmatrix},$$

$$\alpha_j, \beta_j, \delta_j \in \mathbb{R} \quad (j=1, \dots, m),$$

有如下结论。

定理1 若算法1进行  $m$  步, 则产生的矩阵  $\mathbf{V}_i (i=1, \dots, m)$ ,  $\mathbf{W}_j (j=1, \dots, m)$  构成一个  $\mathbf{M}$ -双正交化系统, 即

$$\mathbf{W}_m^H \diamond_F \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) = \mathbf{I}_m, \quad (3)$$

且满足如下关系

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_m) = \mathbf{V}_m (\mathbf{T}_m \otimes \mathbf{I}_n) + \delta_{m+1} \mathbf{V}_{m+1} (\mathbf{e}_m^T \otimes \mathbf{I}_n), \quad (4)$$

$$\mathbf{M}^*(\mathbf{W}_m) = \mathbf{W}_m (\mathbf{T}_m^T \otimes \mathbf{I}_n) + \beta_{m+1} \mathbf{W}_{m+1} (\mathbf{e}_m^T \otimes \mathbf{I}_n), \quad (5)$$

$$\mathbf{W}_m^H \diamond_F \mathbf{M}^2(\mathbf{V}_m) = \mathbf{T}_m \quad (6)$$

证明 证明过程与文献[20-21]相似, 故省略。

## 2 复全局QMR算法

根据复全局  $\mathbf{M}$ -双正交化过程, 有

$$\mathbf{M}(\mathbf{V}_m) = \mathbf{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \otimes \mathbf{I}_n), \quad \tilde{\mathbf{T}}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_m \\ \delta_{m+1} \mathbf{e}_m^T \end{pmatrix}$$

令  $\beta = \|\mathbf{R}_0\|_F$ ,  $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{R}_0}{\beta}$ , 则第  $m$  步的近似解可表示为

$$\mathbf{X}_m = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^m y_m^{(i)} \mathbf{V}_i = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_m (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n),$$

其中  $\mathbf{y}_m = (y_m^{(1)}, y_m^{(2)}, \dots, y_m^{(m)})^T \in \mathbb{R}^m$ 。相应的残差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_m &= \mathbf{G} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_m) \\ &= \mathbf{G} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_m (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n)) \\ &= \mathbf{R}_0 - \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n) \\ &= \mathbf{R}_0 - \mathbf{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \otimes \mathbf{I}_n) (\mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n) \\ &= \mathbf{V}_{m+1} (\beta \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{I}_n) - \mathbf{V}_{m+1} (\tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m \otimes \mathbf{I}_n) \\ &= \mathbf{V}_{m+1} ((\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m) \otimes \mathbf{I}_n) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ 。从而残差矩阵的范数可表示为

$$\|\mathbf{R}_m\|_F = \|\mathbf{V}_{m+1} ((\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m) \otimes \mathbf{I}_n)\|_F \quad (7)$$

通常采用极小化  $\|\mathbf{R}_m\|_F$  来计算  $\mathbf{y}_m$ , 但因  $\mathbf{V}_{m+1}$  通常情况下不是正交的, 极小化  $\|\mathbf{R}_m\|_F$  比较复杂。因而一般采用极小化  $\|\beta \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{T}}_m \mathbf{y}_m\|_2$  来计算  $\mathbf{y}_m$ , 相应的方法称为QMR方法。对该极小化问题的求解, 可采用吉文斯旋转变换来计算, 得到如下的复全局QMR算法, 具体细节可参考文献[22]。

算法2 复全局QMR算法(CGI-QMR)

- (1) 选取  $\mathbf{X}_0$ , 计算  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{G} - \mathbf{M}(\mathbf{X}_0)$ 。令  $g_1 = \|\mathbf{R}_0\|_F$ ;
- (2) 令  $\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{R}_0}{g_1}$ , 选取  $\mathbf{W}_1$ , 使  $\langle \mathbf{W}_1, \mathbf{M}(\mathbf{V}_1) \rangle_F = 1$ , (比如  $\mathbf{W}_1 = \frac{\mathbf{M}(\mathbf{V}_1)}{\|\mathbf{M}(\mathbf{V}_1)\|_F^2}$ );
- (3) 令  $t_{01} = t_{10} = 0, \mathbf{W}_0 = \mathbf{V}_0 = 0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ;
- (4) 对  $m=1, 2, \dots$  计算;
- (5)  $t_{m,m} = \langle \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_m), \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) \rangle_F$ ;
- (6)  $\hat{\mathbf{V}}_{m+1} = \mathbf{M}(\mathbf{V}_m) - t_{m,m} \mathbf{V}_m - t_{m-1,m} \mathbf{V}_{m-1}$ ;
- (7)  $\hat{\mathbf{W}}_{m+1} = \mathbf{M}^*(\mathbf{W}_m) - t_{m,m} \mathbf{W}_m - t_{m-1,m} \mathbf{W}_{m-1}$ ;
- (8)  $t_{m+1,m} = \sqrt{|\langle \hat{\mathbf{W}}_{m+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{m+1}) \rangle_F|}$ ;
- (9)  $t_{m,m+1} = \frac{\langle \hat{\mathbf{W}}_{m+1}, \mathbf{M}(\hat{\mathbf{V}}_{m+1}) \rangle_F}{t_{m+1,m}}$ ;
- (10)  $\mathbf{V}_{m+1} = \frac{\hat{\mathbf{V}}_{m+1}}{t_{m+1,m}}$ ;
- (11)  $\mathbf{W}_{m+1} = \frac{\hat{\mathbf{W}}_{m+1}}{t_{m,m+1}}$ ;

(12) 对  $i = \max\{1, m-2\}, \dots, m-1$ , 计算  $t_{i,m} = c_i t_{i,m}$

$+s_i t_{i+1,m}, t_{i+1,m} = -s_i t_{i,m} + c_i t_{i+1,m}$ ;

$$(13) c_m = \frac{t_{m,m}}{\sqrt{t_{m,m}^2 + t_{m+1,m}^2}}, s_m = \frac{t_{m+1,m}}{\sqrt{t_{m,m}^2 + t_{m+1,m}^2}};$$

$$(14) t_{m,m} = c_m t_{m,m} + s_m t_{m+1,m};$$

$$(15) t_{m+1,m} = 0;$$

$$(16) g_m = c_m g_m, g_{m+1} = -s_m g_m;$$

$$(17) P_m = \frac{V_m - t_{m-2,m} P_{m-2} - t_{m-1,m} P_{m-1}}{t_{m,m}};$$

$$(18) X_m = X_{m-1} + g_m P_m;$$

(19) 如果  $|g_{m+1}|$  足够小, 则停止;

(20) 结束。

给出复全局 QMR 算法的残差估计。

**定理 2** 由算法 2 得到的近似解  $X_m$  的残差矩阵

满足如下关系:

$$\|R_m\|_F \leq \|V_{m+1}\|_F |s_1 s_2 \dots s_m| \|R_0\|_F$$

**证明** 根据式(7)有,  $\|R_m\|_F \leq \|V_{m+1}\|_F \|\beta \bar{e}_1 - \bar{T}_m y_m\|_2$ 。

又因  $\|\beta \bar{e}_1 - \bar{T}_m y_m\|_2 = \min_y \|\beta \bar{e}_1 - \bar{T}_m y\|_2 = |g_{m+1}|$ , 且  $g_{m+1}$

$= -s_m g_m = (-1)^m s_1 s_2 \dots s_m g_1$ 。故定理得证。

### 3 数值算例

下面给出两个数值算例来说明复全局 QMR 算法

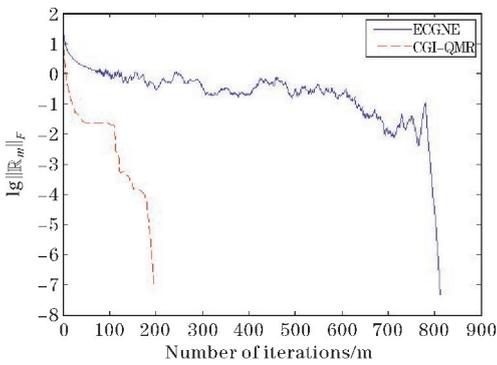
的有效性, 并且与广义的 CGNE 方法<sup>[16]</sup> 在迭代步数 (IT) 和计算时间 (CPU, 单位秒) 方面进行比较。所有测试都是用 Matlab2013a 编程, 并在处理器为 i7-7700HQ 2.80 GHz CPU 和 8.00 GB 内存的笔记本电脑上运行。在所有的数值算例中, 初值  $X_0$  选为零矩阵, 停止迭代条件为  $\|R_m\|_F \leq 10^{-7}$ 。

**例 1** 计算复 Sylvester 矩阵方程  $AX+XB=C$ , 其中  $A=T_n - \sigma_1 h^2 I_n, B=T_n + i\sigma_2 h^2 I_n, T_n = \text{tridiag}(-1, 2, -1), h = \frac{1}{n+1}$ 。

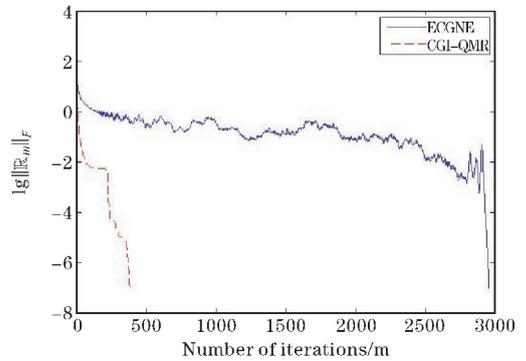
该问题来源于中心分离二维 Helmholtz 方程  $-\Delta u - \sigma_1 u + i\sigma_2 u = f(x, y)$ <sup>[1]</sup>。矩阵  $C$  的选取使得精确解为  $X = \text{tridiag}(-1, 2i, 1)$ 。计算结果见表 1 和图 1。

表 1 例 1 的数值结果

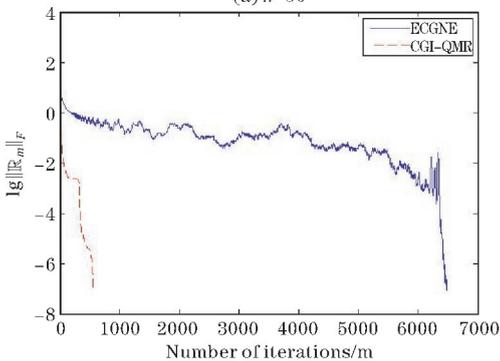
矩阵阶数	算法	迭代次数	CPU/s
n=50	ECGNE	812	0.277
	CGI-QMR	196	0.175
n=100	ECGNE	2957	3.768
	CGI-QMR	381	1.077
n=150	ECGNE	6480	23.947
	CGI-QMR	555	4.632
n=200	ECGNE	11404	91.491
	CGI-QMR	732	12.300



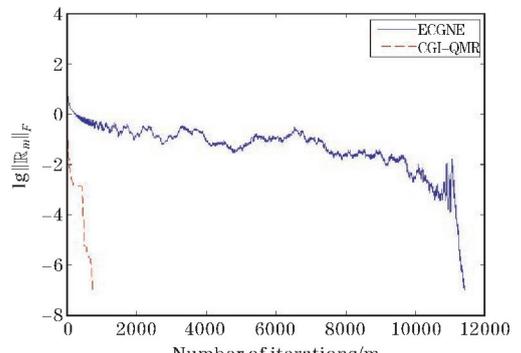
(a) n=50



(b) n=100



(c) n=150



(d) n=200

图 1 例 1 的收敛曲线

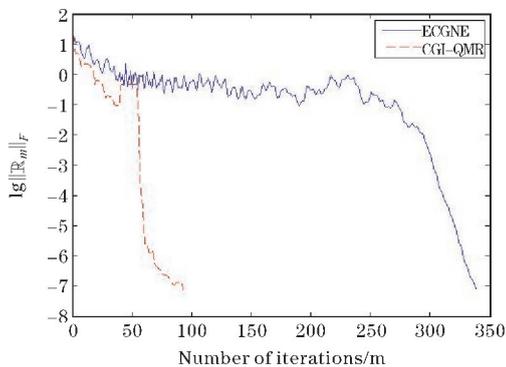
由表 1 可以看出,在给定相同的停止迭代条件下,复全局 QMR 算法比广义 CGNE 方法需要更少的迭代步数和计算时间。同时,图 1 表明复全局 QMR 算法的收敛曲线更光滑。

例 2 计算共轭 Sylvester 矩阵方程  $AX + \bar{X}B = C$ , 其中  $A = \text{tridiag}(-1, 2-i, -1)$ ,  $B = \text{tridiag}(-1, 1+i, -1)$ , 矩阵  $C$  的选取使得精确解为  $X = \text{tridiag}(1, i, 1)$ 。

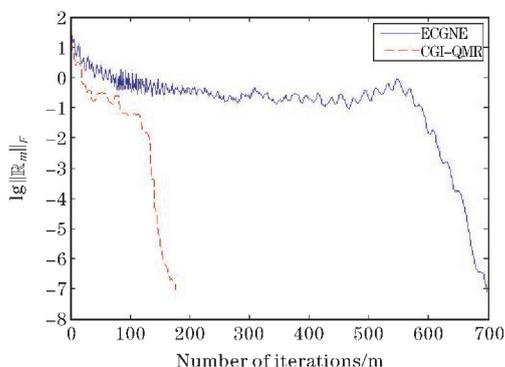
计算结果见表 2 和图 2。从表 2 和图 2 可以看出,相比广义 CGNE 方法,复全局 QMR 算法在迭代步数和计算时间上都占有一定的优势。

表 2 例 2 的数值结果

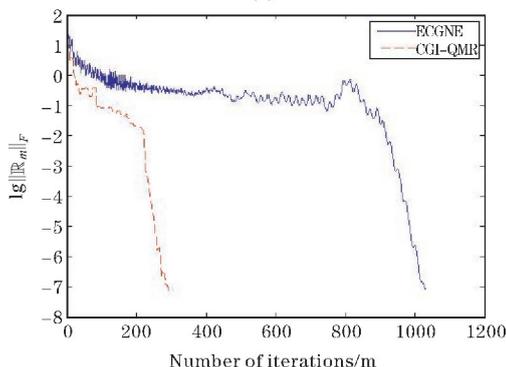
矩阵阶数	算法	迭代次数	CPU/s
$n = 50$	ECGNE	338	0.128
	CGI-QMR	93	0.080
$n = 100$	ECGNE	698	1.002
	CGI-QMR	177	0.565
$n = 150$	ECGNE	1029	4.384
	CGI-QMR	291	2.607
$n = 200$	ECGNE	1354	11.944
	CGI-QMR	379	7.199



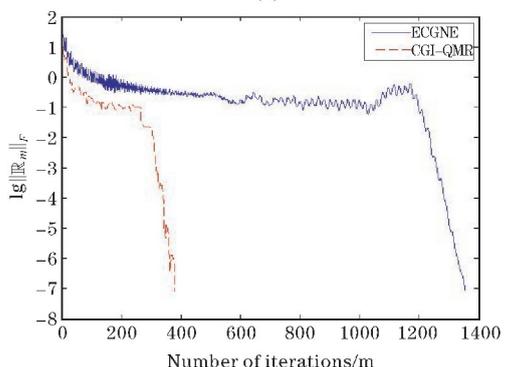
(a)  $n=50$



(b)  $n=100$



(c)  $n=150$



(d)  $n=200$

图 2 例 2 的收敛曲线

## 4 结束语

基于复全局  $M$ -双正交化过程提出一种复全局 QMR 算法求解复矩阵方程,给出了残差估计。该方法能够直接求解复矩阵方程而不需要进行复矩阵的实转化。数值例子验证了新方法的有效性。

## 参考文献:

[1] L D Liao, G F Zhang. Preconditioning of complex linear systems from the Helmholtz equation [J]. Comput. Math. Appl., 2016, 72: 2473–2485.  
 [2] D Kressner, C Schröder, D S Watkins. Implicit QR

algorithms for palindromic and even eigenvalue problems [J]. Numer. Algor., 2009, 51: 209–238.

[3] J H Bevis, F J Hall, R E Hartwig. The matrix equation  $AX + \bar{X}B = C$  and its special cases [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1988, 9: 348–359.  
 [4] V Simoncini, On the numerical solution of  $AX - XB = C$  [J]. BIT, 1996, 36: 814–830.  
 [5] M Robbe, M Sadkane. A convergence analysis of GMRES and FOM methods for Sylvester equations [J]. Numer. Algor., 2002, 30: 71–89.  
 [6] A El Guennouni, K Jbilou, A J Riquet. Block Krylov subspace methods for solving large Sylvester equations [J]. Numer. Algor., 2002, 29: 75–96.  
 [7] K Jbilou. Low rank approximate solutions to large

- Sylvester matrix equations [J]. Appl. Math. Comput. ,2006,177:365–376.
- [8] L Bao, Y Q Lin, Y M Wei. A new projection method for solving large Sylvester equations [J]. Appl. Numer. Math. ,2007,57:521–532.
- [9] A Bouhamidi K Jbilou. A note on the numerical approximate solutions for generalized Sylvester matrix equations with applications [J]. Appl. Math. Comput. ,2008,206:687–694.
- [10] F P A Beik D K Salkuyeh. On the global Krylov subspace methods for solving general coupled matrix equations [J]. Comput. Math. Appl. ,2011,62:4605–4613.
- [11] F P A Beik. Theoretical results on the global GMRES method for solving generalized Sylvester matrix equations [J]. Bull. Iranian Math. Soc. ,2014,40:1097–1117.
- [12] A Kaabi. On the numerical solution of generalized Sylvester matrix equations [J]. Bull. Iranian Math. Soc. ,2014,40:101 – 113.
- [13] M Heyouni, F. Saberi-Movahed, A Tajaddini. On global Hessenberg based methods for solving Sylvester matrix equations [J]. Comput. Math. Appl. 2019,77:77–92.
- [14] S K Li T Z Huang. LSQR iterative method for generalized coupled Sylvester matrix equations [J]. Appl. Math. Model. ,2012,36:3545–3554.
- [15] A G Wu, L L Lv, G R Duan. Iterative algorithms for solving a class of complex conjugate and transpose matrix equations [J]. Appl. Math. Comput. ,2011,217:8343–8353.
- [16] A G Wu, G Feng, G R Duan, et al. Finite iterative solutions to a class of complex matrix equations with conjugate and transpose of the unknowns [J]. Math. Comput. Model. ,2010,52:1463–1478.
- [17] L J Zhao, X Y Hu, L Zhang. Linear restriction problem of Hermitian reflexive matrices and its approximation [J]. Appl. Math. Comput. ,2008,200:341–351.
- [18] R Bouyouli, K Jbilou, R. Sadaka, et al. Convergence properties of some block Krylov subspace methods for multiple linear systems [J]. J Comput. Appl. Math. ,2006,196:498–511.
- [19] K Jbilou, H. Sadok, A Tinzefte Oblique projection methods for linear systems with multiple right-hand sides [J]. Electron. T. Numer. Ana. ,2005,20:119–138.
- [20] Y F Jing, T Z Huang, Y Zhang, et al. Lanczos-type variants of the COCR method for complex nonsymmetric linear systems [J]. J. Comput. Phys. ,2009,228:6376–6394.
- [21] B Carpentieri, Y F Jing, T Z Huang. The BiCOR and CORS iterative algorithms for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM J. Sci. Comput. ,2011,33:3020–3036.
- [22] R W Freund N M Nachtigal. QMR: a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems [J]. Numer. Math. ,1991,60:315–339.

## Complex Global QMR Algorithm for the Complex Matrix Equations

WANG Maoxiao, LI Shengkun

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

**Abstract:** In this paper, we study the global Krylov subspace algorithm for the complex matrix equations. Using the real inner product of complex matrices, a complex global  $M$ -biorthogonalization process is proposed. Based on this process, a new complex global QMR algorithm is obtained to solve the complex matrix equations. The numerical examples show that the algorithm is more effective than the existing methods.

**Keywords:** complex matrix equations; real inner product; global  $M$ -biorthogonalization process; global QMR algorithm