

文章编号: 2096-1618(2021)05-0564-06

含扩散项 Lotka-Volterra 竞争模型的数值模拟

陈艳秋, 杨光崇

(成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225)

摘要: Lotka-Volterra 竞争模型是研究种群关系的重要模型之一, 要求它的解是很困难的。通过有限差分法, 研究一个带有扩散项 Lotka-Volterra 系统的近似解, 并利用 Matlab 软件绘制该模型中两种群的图像。通过改变种群的固有增长率, 将所得的两个种群的图像进行对比, 清晰地反映出两个种群的变化情况。在使用有限差分法对模型进行数值模拟时, 克服了非线性问题带来的困难。

关键词: Lotka-Volterra 竞争模型; 有限差分法; 近似解; 数值模拟

中图分类号: O29

文献标志码: A

doi: 10.16836/j.cnki.jcuit.2021.05.15

0 引言

人类生活在一个巨大的生态系统中, 并与生态系统中存在的各类生物关系密切, 因此对于生物种群的研究一直都是人们在探究生命历程中的一项重举。人类对于生物种群的研究最常见的是对其种群数量的研究, 而在数学中往往是通过建立相应的数学模型, 运用这些模型反映种群的变化情况。

Malthus^[1]研究人口数量, 提出了经典的 Malthus 模型:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = ru(t), t > 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $u(t)$ 为 t 时刻种群数量, $r > 0$ 为常数表示种群固有增长率。再到 Logistic 增长模型^[2-3]的问世, 即

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left(1 - \frac{u(t)}{K}\right), t > 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, K 代表最大环境容量, 即在自然条件下可以容纳的最大种群规模。正是因为引入了这个新名词, 从而推动了人类的研究进度。随着研究的推进, 开始研究同一范围内多个种群之间的生存问题, 并发现一个种群的存在会对其他种群的发展起到抑制作用, 同时多种群之间出现了资源竞争的情形, 于是诞生了经典的 Lotka-Volterra 竞争模型(简称为 L-V 竞争模型)^[4-5]:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = r_1 u \left(1 - \frac{u+c_1 v}{u_m}\right) \\ \frac{dv}{dt} = r_2 v \left(1 - \frac{v+c_2 u}{v_m}\right) \end{cases} \quad (3)$$

其中, u, v 分别代表两个种群的种群密度, u_m, v_m 分别代表两个种群的种群密度最大值, $r_i (i=1, 2)$ 表示对应两个种群各自的固有增长参数, $c_i (i=1, 2,)$ 表示种间竞争抑制参数。这个模型较清晰地体现了两种群之间的竞争关系, 同时也是单种群的 Logistic 模型研究的延伸。

由于生命机体容易受到多种因素和变量的影响, 所以将 L-V 竞争模型重新进行改写, 变为如下形式^[2]:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(r_1 - b_1 u - c_1 v) \\ \frac{dv}{dt} = v(r_2 - b_2 v - c_2 u) \end{cases} \quad (4)$$

其中, r_1 和 r_2 表示对应两个种群的各自的固有增长参数, b_1 和 b_2 表示两种群的种内作用系数, 也指每个种群内部的自我约制, c_1 和 c_2 表示两种群间的作用系数, 也称为种间竞争强度, 反映两个种群之间的相互作用。上述模型是 L-V 竞争模型的常用形式。

考虑到在自然环境里种群和资源总是分布不均匀, 生物种群为了增加生存机遇会通过不同的传播方式扩大栖息地, 于是在空间中发生一定的扩散行为, 学者们在研究的模型中加上扩散项, 由此得到带有扩散项的 L-V 竞争模型^[11-12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(r_1 - b_1 u - c_1 v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v(r_2 - b_2 v - c_2 u) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $d_i (i=1, 2)$ 代表种群扩散速率。

在 Logistic 模型的研究中考虑到了收获项^[6]。陈霞等^[7]运用带收获项的 Logistic 种群增长模型预测了中国人口数。所以在对 L-V 竞争模型的研究中同样考虑到收获项, 将模型变换为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(r_1 - b_1 u - c_1 v) - H_1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v(r_2 - b_2 v - c_2 u) - H_2 \end{cases} \quad (6)$$

文献[8]提到了单种群模型中收获项的3种表示形式,在后续的研究中也可以考虑将这3种形式的收获项运用到带有扩散项的L-V竞争模型中。

Lan等^[9]为研究半正定 Hammerstein 积分方程正解的存在性,证明了

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = ru(t, x) \left(1 - \frac{u(t, x)}{K}\right) + d \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \delta H(x) \rho_{\varepsilon_0}(u(t, x)) \quad (7)$$

在 Dirichlet 边界条件下对收获函数有稳态解。在此之上, Yang 等^[10]研究了一类高维非线性种群扩散模型的非稳态局部近似解。刘钦磐^[11]研究了带有扩散项模型的初边值问题。

受文献[9-10]的启发,文中将研究带有扩散项的L-V竞争模型。由于直接求L-V竞争模型中方程的解相当困难,同时为了能够展现 $u(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 的具体解的形式,考虑使用有限差分法^[13]求近似解,并且绘制出近似解的图像。

1 数值模拟

给定一个L-V竞争系统,研究其中两种群的图像变化,所给定的L-V竞争系统是通过式(1)变化而成。假设在相同区域内有两个生活习性相似的种群,即种群甲和种群乙,它们之间存在竞争关系。考虑种群反应扩散系统的状态取决于时间和空间的变化,这类种群模型的非稳态情形(即 $u=u(x, t)$, $v=v(x, t)$)如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_1 u(1-u-v), \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r_2 v(1-v-2u) \\ r_1 > 32, r_2 > 32 \\ u(x, 0) = v(x, 0) = x(1-x), 0 < x < 1 \\ u(0, t) = v(0, t) = t^2 \\ u(1, t) = v(1, t) = (1-t)^2, t > 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中: u 代表种群甲的种群密度, v 代表种群乙的种群密度, r_1 表示种群甲的固有增长参数, r_2 表示种群乙的固有增长参数, t 表示时间, x 表示位置。

下面建立模型(8)的差分格式:

设 $\Delta x = h = 0.01$, $\Delta t = \tau = 0.01$, 则有 $x_i = 0 + i\Delta x = ih$, $t_j = 0 + j\Delta t = jh$, 其中 $i = 0, 1, 2, \dots, 100$; $j = 0, 1, 2, \dots, 100$ 。由式(2)可知初始条件和边界条件为 $u(x_i, 0) =$

$v(x_i, 0) = x_i(1-x_i)$, $u(0, t_j) = v(0, t_j) = t_j^2$, $u(1, t_j) = v(1, t_j) = (1-t_j)^2$, 要计算其他 $u(x_i, t_j)$ 和 $v(x_i, t_j)$ 的数值,可利用有限差分法。先计算种群甲的 $u(x_i, t_j)$, 即

$$u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} dt \approx \frac{\partial u(x_i, t)}{\partial t} \cdot \Delta t \quad (9)$$

则有

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x_i^2} &\approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_j) + u(x_i - \Delta x, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (11)$$

根据有限差分法得到关于种群甲的近似表达为

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} &= \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{\Delta x^2} + \\ &r_1 u(x_i, t_j) (1 - u(x_i, t_j) - v(x_i, t_j)) \end{aligned} \quad (12)$$

对于种群乙而言,同理可得到

$$v(x_i, t_j) - v(x_i, t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} dt \approx \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} \cdot \Delta t \quad (13)$$

那么

$$\frac{\partial v(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{v(x_i, t_j) - v(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} \quad (14)$$

又有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x_i, t_j)}{\partial x_i^2} &\approx \frac{v(x_i + \Delta x, t_j) + v(x_i - \Delta x, t_j) - 2v(x_i, t_j)}{\Delta x^2} \\ &= \frac{v(x_{i+1}, t_j) + v(x_{i-1}, t_j) - 2v(x_i, t_j)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (15)$$

同样能够得到关于种群乙的近似表达为

$$\begin{aligned} \frac{v(x_i, t_j) - v(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} &= \frac{v(x_{i+1}, t_j) + v(x_{i-1}, t_j) - 2v(x_i, t_j)}{\Delta x^2} + \\ &r_2 v(x_i, t_j) (1 - v(x_i, t_j) - 2u(x_i, t_j)) \end{aligned} \quad (16)$$

将式(12)和式(16)展开后,展开式的最后一项将会出现 $u^2(x_i, t_j)$, $v^2(x_i, t_j)$, 可能出现方程组无解的情况。考虑到区间划分得较小,有 $u(x_i, t_j)$ 和 $u(x_i, t_{j-1})$, 以及 $v(x_i, t_j)$ 和 $v(x_i, t_{j-1})$ 的值相差也较小,所以为求解出方程组,将式(12)的 $r_1 u(x_i, t_j) (1 - u(x_i, t_j) - v(x_i, t_j))$ 改写为 $r_1 u(x_i, t_j) (1 - u(x_i, t_{j-1}) - v(x_i, t_{j-1}))$, 将式(16)的 $r_2 v(x_i, t_j) (1 - v(x_i, t_j) - 2u(x_i, t_j))$ 改写为 $r_2 v(x_i, t_j) (1 - v(x_i, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}))$ 。这样就将复杂的非线性问题转化为线性问题,从而求线性方程组的

解。由此关于种群甲的方程变为

$$\frac{u(x_i, t_j) - u(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{\Delta x^2} +$$

$$r_1 u(x_i, t_j) (1 - u(x_i, t_{j-1}) - v(x_i, t_{j-1})) \quad (17)$$

关于种群乙的方程变为

$$\frac{v(x_i, t_j) - v(x_i, t_{j-1})}{\Delta t} = \frac{v(x_{i+1}, t_j) + v(x_{i-1}, t_j) - 2v(x_i, t_j)}{\Delta x^2} +$$

$$r_2 v(x_i, t_j) (1 - v(x_i, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1})) \quad (18)$$

对于式(17), 当 $j=1$ 时, 可列出 99 个近似方程构成的方程组, 如下:

$$\begin{cases} \frac{u(x_1, t_1) - u(x_1, 0)}{\Delta t} = \frac{u(x_2, t_1) + u(x_0, t_1) - 2u(x_1, t_1)}{\Delta x^2} + r_1 u(x_1, t_1) (1 - u(x_1, 0) - v(x_1, 0)) \\ \frac{u(x_2, t_1) - u(x_2, 0)}{\Delta t} = \frac{u(x_3, t_1) + u(x_1, t_1) - 2u(x_2, t_1)}{\Delta x^2} + r_1 u(x_2, t_1) (1 - u(x_2, 0) - v(x_2, 0)) \\ \dots \\ \frac{u(x_{98}, t_1) - u(x_{98}, 0)}{\Delta t} = \frac{u(x_{99}, t_1) + u(x_{97}, t_1) - 2u(x_{98}, t_1)}{\Delta x^2} + r_1 u(x_{98}, t_1) (1 - u(x_{98}, 0) - v(x_{98}, 0)) \\ \frac{u(x_{99}, t_1) - u(x_{99}, 0)}{\Delta t} = \frac{u(x_{100}, t_1) + u(x_{98}, t_1) - 2u(x_{99}, t_1)}{\Delta x^2} + r_1 u(x_{99}, t_1) (1 - u(x_{99}, 0) - v(x_{99}, 0)) \end{cases}$$

又将 $u(x_i, t_j)$ 表示为 u_i^j , 化简方程组可得

$$\begin{cases} -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_0^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_1^0 - v_1^0) \right] u_1^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_2^1 = u_1^0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_1^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_2^0 - v_2^0) \right] u_2^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_3^1 = u_2^0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_2^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_3^0 - v_3^0) \right] u_3^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_4^1 = u_3^0 \\ \dots \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{97}^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_{98}^0 - v_{98}^0) \right] u_{98}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{99}^1 = u_{98}^0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{98}^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_{99}^0 - v_{99}^0) \right] u_{99}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{100}^1 = u_{99}^0 \end{cases}$$

由此得到通项

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^j + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_i^{j-1} - v_i^{j-1}) \right] u_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^j = u_i^{j-1} \quad (19)$$

式(19)可表示为

$$AU = B$$

其中: $j=1, 2, \dots, 99, 100$,

$$U = (u_1^j, u_2^j, \dots, u_{98}^j, u_{99}^j)^T,$$

$$B = \left(u_1^{j-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_0^j, u_2^{j-1}, \dots, u_{98}^{j-1}, u_{99}^{j-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{100}^j \right)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_1^{j-1} - v_1^{j-1}) & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_2^{j-1} - v_2^{j-1}) & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_{98}^{j-1} - v_{98}^{j-1}) & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_1 \cdot \Delta t (1 - u_{99}^{j-1} - v_{99}^{j-1}) \end{pmatrix}.$$

同理, 对于式(18), 当 $j=1$ 时, 可列出 99 个近似方程构成的方程组, 如下:

$$\begin{cases} \frac{v(x_1, t_1) - v(x_1, 0)}{\Delta t} = \frac{v(x_2, t_1) + v(x_0, t_1) - 2v(x_1, t_1)}{\Delta x^2} + r_2 v(x_1, t_1) (1 - v(x_1, 0) - 2u(x_1, 0)) \\ \frac{v(x_2, t_1) - v(x_2, 0)}{\Delta t} = \frac{v(x_3, t_1) + v(x_1, t_1) - 2v(x_2, t_1)}{\Delta x^2} + r_2 v(x_2, t_1) (1 - v(x_2, 0) - 2u(x_2, 0)) \\ \dots \\ \frac{v(x_{98}, t_1) - v(x_{98}, 0)}{\Delta t} = \frac{v(x_{99}, t_1) + v(x_{97}, t_1) - 2v(x_{98}, t_1)}{\Delta x^2} + r_2 v(x_{98}, t_1) (1 - v(x_{98}, 0) - 2u(x_{98}, 0)) \\ \frac{v(x_{99}, t_1) - v(x_{99}, 0)}{\Delta t} = \frac{v(x_{100}, t_1) + v(x_{98}, t_1) - 2v(x_{99}, t_1)}{\Delta x^2} + r_2 v(x_{99}, t_1) (1 - v(x_{99}, 0) - 2u(x_{99}, 0)) \end{cases}$$

将 $v(x_i, t_j)$ 用 v_i^j 表示,化简方程组可得

$$\begin{cases} -\frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_0^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_1^0 - 2u_1^0)\right]v_1^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_2^1 = v_1^0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_1^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_2^0 - 2u_2^0)\right]v_2^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_3^1 = v_2^0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_2^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_3^0 - 2u_3^0)\right]v_3^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_4^1 = v_3^0 \\ \dots \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_{97}^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_{98}^0 - 2u_{98}^0)\right]v_{98}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_{99}^1 = v_{98}^0 \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_{98}^1 + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_{99}^0 - 2u_{99}^0)\right]v_{99}^1 - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_{100}^1 = v_{99}^0 \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_1^{j-1} - 2u_1^{j-1}) & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_2^{j-1} - 2u_2^{j-1}) & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_{98}^{j-1} - 2u_{98}^{j-1}) & & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & \\ & & -\frac{\Delta t}{\Delta x^2} & 1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_{99}^{j-1} - 2u_{99}^{j-1}) & \end{pmatrix}$$

为更形象地反映方程解的形式,借助数学软件计算所有 $u_i^j = u(x_i, t_j)$ 和 $v_i^j = v(x_i, t_j)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 100$; $j = 1, 2, \dots, 100$) 的数值解,并绘制解的图像(结果保留 4 位小数)。根据文献[9]可知,所取 r 应该大于 32,所

由此得到通项为

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_{i-1}^j + \left[1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} - r_2 \cdot \Delta t(1 - v_i^{j-1} - 2u_i^{j-1})\right]v_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_{i+1}^j = v_i^{j-1} \tag{20}$$

同样,式(20)可表示为

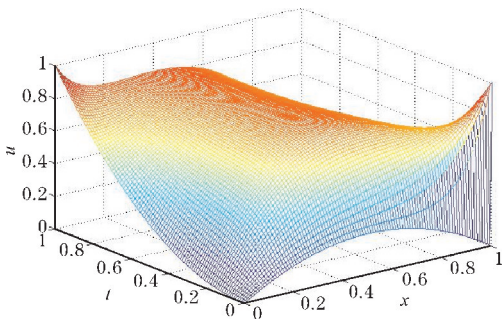
$$DV = P$$

其中 $j = 1, 2, \dots, 99, 100$,

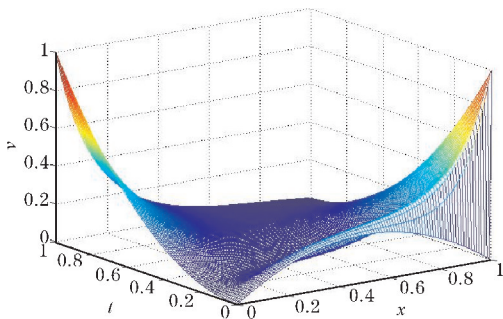
$$V = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_{98}^j, v_{99}^j)^T,$$

$$P = \left(v_1^{j-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_0^j, v_2^{j-1}, \dots, v_{98}^{j-1}, v_{99}^{j-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}v_{100}^j\right),$$

以在绘制图形时选择了 4 种情况,即取 $r_1 = r_2 = 33, r_1 = r_2 = 100, r_1 = r_2 = 500$ 以及 $r_1 = 35, r_2 = 50$,并在此将区间划分的步长令为 0.01,运用数学软件 Matlab 绘制出两个种群的图像,结果如图 1~4。

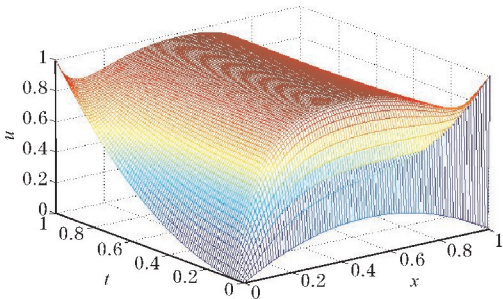


(a) 种群甲密度 u

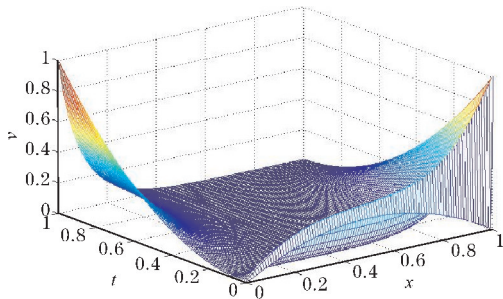


(b) 种群乙密度 v

图 1 $r_1 = r_2 = 33, \Delta x = \Delta t = 0.01$ 时两种群密度 u 和 v 的图像

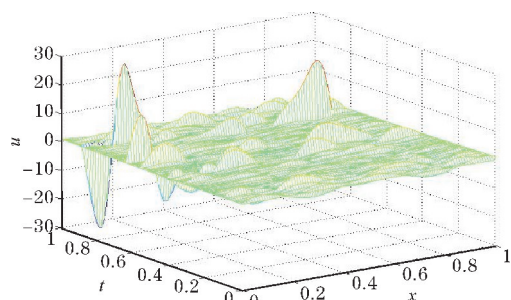
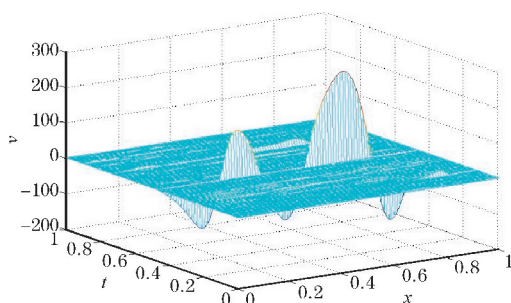
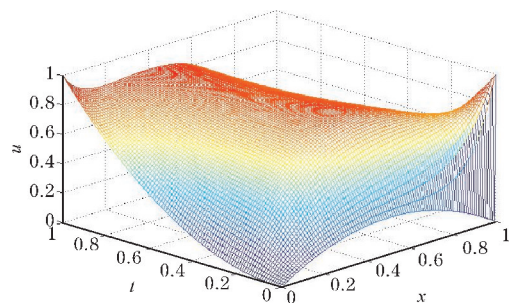
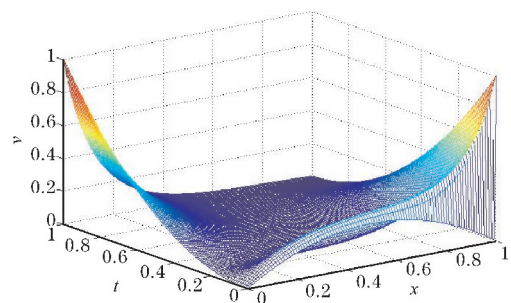


(a) 种群甲密度 u



(b) 种群乙密度 v

图 2 $r_1 = r_2 = 100, \Delta x = \Delta t = 0.01$ 时两种群密度 u 和 v 的图像

(a) 种群甲密度 u (b) 种群乙密度 v 图3 $r_1=r_2=500, \Delta x=\Delta t=0.01$ 时两种群密度 u 和 v 的图像(a) 种群甲密度 u (b) 种群乙密度 v 图4 $r_1=35, r_2=50, \Delta x=\Delta t=0.01$ 时两种群密度 u 和 v 的图像

2 结果分析

图1是考虑 $r_1=r_2=33$ 时所绘制的图像,可以看出关于 u 的图形在一定范围内是随着时间的增长和位置的变化而呈上升趋势,关于 v 的图形是随着时间的增长和位置的变化呈下降趋势,这正好体现出两个相似物种在同样的生存环境之下,种群甲比种群乙更具生

存优势,能够占有更多的资源,在后期的生存下,种群乙可能会消失。

图2是 $r_1=r_2=100$ 时所绘制的图形,它们之间的变化情况类似于图1,同样可以较为清楚地看出种群甲比种群乙更具优势。

通过观察图3可以发现,当 $r_1=r_2=500$ 时,出现了只有部分正解的情况,然而考虑到是将模型运用于实际生活中,其所有的数值解应为正解,说明所取的取值过大。这就与文献[9]的结论一致,当 $r>32$ 并且越靠近32时,得到的情况越准确。

图4是在两个种群的种群固有增长率不同,并且选取的值更接近32时绘制出的。在这里 $r_1=35$, $r_2=50$,由于种群甲的 u 和种群乙的 v 在模型中会相互影响,所以将两个图像对比后可以发现,在定义的式(8)下,种群乙的种群密度会减小,种群甲的种群密度会增加,从而得到种群甲在同样的生存环境下更具有优势。所绘制的以上图像都形象地反映了在给定义式(8)下两种群的增长规律。

3 结束语

研究的是一种特殊情况下给定的 L-V 竞争模型,该研究方式同样适用于一般情况的 L-V 竞争模型。对于 L-V 竞争模型已有了一定的认知,并且可以发现多种领域已经涉及到对 L-V 竞争模型的研究与应用,除了常见的应用是用于研究自然界种群之间的关系以外,它还可以运用到实际生活中。例如,利用该模型研究旅游景点的市场变化、服务行业的发展以及网络群体竞争等。由此看出 L-V 竞争模型在生物、数学、经济、文化、网络等多个方面有着重大意义。

参考文献:

- [1] Malthus T. An Essay on the principle of poplation [M]. LOIUDON: Penguin Books harmondsword, 1798.
- [2] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究[M]. 合肥:安徽教育出版社,1996.
- [3] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京:科学出版社,1985.
- [4] Volterra V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together [J]. Journal Du Conseil, 1928, 3(1): 3-51.
- [5] 陆志奇. 竞争数学模型的理论研究[M]. 北京:科学出版社,2008.

- [6] Laham M F, Krishnarajah I S, Shariff J M. Fish Harvesting Management Strategies Using Logistic Growth Model[J]. Sains Malaysiana, 2012, 41: 171–177.
- [7] 陈霞, 肖岚. Logistic 模型的改进与中国人口预测[J]. 成都信息工程大学学报, 2020, 35(2): 239–243.
- [8] Alfred DACI. Fish Harvesting Models and Their Applications in a Reservoir in Sanrada Albania [J]. JMEST, 2016, 3: 5279–5282.
- [9] Lan K Q, Lin W. Population models with quasi-constant-yield harvest rates[J]. Mathematical Biosciences & Engineering, 2017, 14(2): 467–490.
- [10] Yang G C, Chen X, Xiao L. Local Approximate Solutions of A Class of Nonlinear Diffusion Population Models[J]. Nonlinear Functional Analysis and Applications, 2021, 26(1): 83–92.
- [11] 刘钦磐. Lotka-Volterra 竞争模型的长时间渐近行为数值研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.
- [12] Yamada Y. Positive solutions for Lotka – Volterra competition system with diffusion [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(9): 6085–6096.
- [13] 熊彬, 阮百尧. MATLAB 在有限差分法中的应用[J]. 桂林工学院学报, 2001(2): 104–109.

Numerical Simulation of Lotka-Volterra Competition Model with Diffusion Terms

CHEN Yanqiu, YANG Guangchong

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: Lotka-Volterra competition model is one of the most important models to study population relationship, and it is very difficult to seek its solutions. In this paper, the finite difference method is used to study approximate solution of a Lotka-Volterra reaction-diffusion system, and the images of two-competing species in the model are drawn by the Matlab. By changing the inherent growth rate of the population, we compare the changes in population density of two populations, which clearly reflects the mutual influence between the two populations. In the use of finite difference method, the difficulty of nonlinearity involved in the competition model is overcome.

Keywords: Lotka-Volterra competition model; finite difference method; approximate solution; numerical simulation.