

应用差分进化算法的频率抽样法线性相位非递归数字滤波器设计

胡仕兵

(成都信息工程大学电子工程学院, 四川 成都 610225)

摘要:滤波器过渡带最佳抽样点值的确定是频率抽样法非递归数字滤波器设计的关键,提出一种应用差分进化算法的频率抽样法线性相位非递归数字滤波器的优化设计方法。首先推导频率抽样法线性相位非递归数字滤波器的设计公式,并分析滤波器频率响应的误差特征。然后以滤波器过渡带样本值为优化变量,以阻带性能指标设计目标适应度函数,利用差分进化算法的全局性和内在并行性搜索最优解,并给出算法实现的具体步骤和实验结果。实验数据表明:采用差分进化算法确定的频率过渡带样点值是最优的,设计的非递归数字滤波器的通带最大衰减和阻带最小衰减分别达到0.2234 dB和66.6637 dB,频率特性优于传统设计方法。

关键词:差分进化算法;频率抽样法;线性相位;非递归数字滤波器;目标适应度函数;优化设计

中图分类号:TN911.72;TN911.1

文献标志码:A

doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2022.02.006

0 引言

数字滤波器是数字信号处理系统中最重要、最基本的元件,可分为递归型和非递归型两种。非递归型数字滤波器与递归型数字滤波器相较而言,结构上没有反馈回路,系统总是因果稳定的,且在整个频率范围内均能提供严格的线性相位特性,又可具有任意的幅度特性^[1-2],故广泛应用于音视频信号及数据信号的传输、图像处理、模式识别、雷达信号处理、调制解调器、希尔伯特变换器、高保真音响系统、线性微分器及任意频率特性滤波器的设计等工程领域中。

差分进化(differential evolution, DE)算法是一种基于模拟自然界生物的进化过程、基于群体智能理论的随机启发式的全局优化搜索进化算法,由学者 Rainer Storn、Kenneth Price 和 Martin Rüttgers 于 20 世纪 90 年代末首次提出^[3-4]。与其他进化算法相比,它采用简单的实数(浮点)编码技术、基于个体向量差的简单差分变异策略和一对一的竞争生存策略,降低了进化操作的复杂性。此外,它可以在不用描述问题全部特征信息的情况下,凭借其特有的记忆能力动态跟踪当前搜索状况并调整搜索策略,具有较强的全局收敛能力、自适应性、鲁棒性和确定性,适用于求解一些利用常规的数学规划方法如单纯形法、牛顿法、最小二乘法、共轭梯度法等很难求解的非线性、多峰值、高维等复杂环境中的优化问题^[5]。因此,DE 算法被广泛地

应用在信号处理、机器人、人工神经网络、数据挖掘、电力与电磁学、生物信息、经济学和运筹学、食品安全和环境保护、现代农业等国民经济的各个领域中^[6]。

频率抽样法(frequency sampling method, FSM)是非递归型数字滤波器设计的常用方法之一。在确定过渡带抽样点值时,常常采用查表法^[7]、遗传算法^[7-10]、免疫算法^[11-12]、粒子群优化算法^[13]、进化规划算法^[14]、蚂蚁算法^[15]等,这些方法在一定程度上存在解不是最优解和算法控制变量多、易过早收敛、效率低、编程复杂等问题。本文提出一种将 DE 算法应用于频率抽样法线性相位非递归数字滤波器(linear phase non-recursive digital filters, LPNDF)优化设计的新方法,确定滤波器频率过渡带抽样点的最佳值。

1 FSM 的基本思想^[7,10,16]

设待设计的理想滤波器频率特性为 $H_d(e^{j\omega})$,对其在 ω 的一个周期 $[0, 2\pi)$ 内等间隔抽样 N 个点,得

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1)$$

对 $H_d(k)$ 进行 N 点 IDFT,可唯一地求得有限长序列 $h(n)$:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

式中 $h(n)$ 即为设计的滤波器单位脉冲响应。其系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \quad (3)$$

其中, $1-z^{-N}$ 项的 N 个零点与求和式中每一项的极点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 完全抵消, 故该系统是一个 FIR 系统。其频率响应 $H(e^{j\omega})$ 为

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1}{N} \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\omega}} =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1}{N} \frac{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)N}}{1-e^{-j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)}} = \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{N\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]}$$

$$e^{-j\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N-1}{2}\right]} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{\pi k}{N}(N-1)} \frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{N\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} \quad (4)$$

以上就是 FSM 的基本思想, $H(e^{j\omega})$ 即为设计的滤波器实际频率响应。

2 LPNDF 的频率抽样设计公式及频率特性

非递归型数字滤波器具有线性相位的约束条件是

N 为奇数时:

$$H_d(k) = \begin{cases} H_g(k) e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k} = H_g(k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=0, 1, \dots, (N-1)/2 \\ H_g(N-k) e^{j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}(N-k)} = H_g(N-k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=(N+1)/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (8)$$

N 为偶数时:

$$H_d(k) = \begin{cases} H_g(k) e^{-j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k} = H_g(k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=0, 1, \dots, N/2-1 \\ 0, & k=N/2 \\ H_g(N-k) e^{j\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}(N-k)} = -H_g(N-k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=N/2+1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (9)$$

将式(8)、(9)分别代入式(4)中, 经化简后得频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的表示式为

N 为奇数时:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \frac{H_g(0) \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{H_g(k)}{N} \left[\frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} + \frac{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} \right] \right\} \quad (10)$$

N 为偶数时:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \frac{H_g(0) \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{H_g(k)}{N} \left[\frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} + \frac{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} \right] \right\} \quad (11)$$

同理, 对于第二类 LPNDF, 其线性相位函数条件为 $\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega$, 于是 $\theta(k) = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k$ ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$), 故可得 $H_d(k)$ 的表达式为

N 为奇数时:

$$H_d(k) = \begin{cases} H_g(k) e^{j\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k\right)} = -jH_g(k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=0, 1, \dots, (N-1)/2 \\ H_g(N-k) e^{j\left[\frac{\pi}{2} + \frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}(N-k)\right]} = jH_g(N-k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=(N+1)/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (12)$$

N 为偶数时:

$h(n)$ 是实序列且满足 $h(n) = h(N-1-n)$ (第一类线性相位) 或 $h(n) = -h(N-1-n)$ (第二类线性相位)。将 $H_d(e^{j\omega})$ 表示成幅度函数 $H_{dg}(\omega)$ (可正可负的实函数) 和相位函数 $\theta(\omega)$ 的形式, 即 $H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega) e^{j\theta(\omega)}$, 从而有

$$H_d(k) = H_g(k) e^{j\theta(k)}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5)$$

其中: $H_g(k) = H_{dg}(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_{dg}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$, $\theta(k) =$

$$\theta(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \theta\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

当 $h(n)$ 是长度为 N 的实序列时, 根据 DFT 的共轭对称性可知

$$H_d(k) = H_d^*(N-k) \quad (6)$$

将式(5)代入式(6), 可得

$$\begin{cases} H_g(k) = H_g(N-k) \\ \theta(k) = -\theta(N-k) \end{cases} \quad (7)$$

对于第一类 LPNDF, 其线性相位函数条件为 $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$, 于是 $\theta(k) = -\frac{N-1}{2}\frac{2\pi}{N}k$ ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$), 由此可得 $H_d(k)$ 的表达式为

$$H_d(k) = \begin{cases} H_g(k) e^{j(-\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k)} = -jH_g(k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=0, 1, \dots, N/2-1 \\ H_g(N/2), & k=N/2 \\ H_g(N-k) e^{j[\frac{\pi}{2} + \frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N}(N-k)]} = -jH_g(N-k) e^{-j\frac{N-1}{N}\pi k}, & k=N/2+1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (13)$$

这两种情况下, $H_g(0) = 0$ 。

将式(12)、(13)分别代入式(4)中,得频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的表示式为 N 为奇数时:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(-\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{H_g(k)}{N} \left\{ \frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} - \frac{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} \right\} \quad (14)$$

N 为偶数时:

$$H(e^{j\omega}) = e^{j(-\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)} \left\{ \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{H_g(k)}{N} \left[\frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} - \frac{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}k\right)/2\right]} \right] + \frac{H_g\left(\frac{N}{2}\right) \sin\left[\left(\omega - \pi\right)\frac{N}{2}\right]}{N \sin\left[\left(\omega - \pi\right)/2\right]} \right\} \quad (15)$$

由式(10)、(11)、(14)、(15)可知,在频率抽样点 $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ ($k=0, 1, 2, \dots, N-1$) 上设计的滤波器频率响应

严格地与理想频率响应相等,即 $H(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$,逼近误差为0;在非抽样点频率上的频响值由各抽样点处加权内插函数的延伸叠加而构成,存在着一定的逼近误差。理想幅度函数 $H_{dg}(\omega)$ 变化越平缓,逼近误差越小;相反,逼近误差越大;因此,在理想频响的跳变点(不连续点)两边产生肩峰和起伏(通带和阻带中的肩峰值分别对应通带最大衰减 R_p 和阻带最小衰减 A_s),如图1所示,其中 $H_g(\omega)$ 是 $H(e^{j\omega})$ 的幅度函数。增大频域抽样点数 N ,使过渡带变窄和使通带、阻带内的振荡起伏变快,通带最大衰减 R_p 和阻带最小衰减 A_s 并没有显著的改善,如图2所示。此外,设计滤波器的 R_p (约为1.11 dB) 和 A_s (约为16.9 dB) 值不能满足一般工程上的要求。可以在理想频响间断点附近内插一些过渡抽样点,消除频带边缘的突变,减小通带和阻带中的起伏波动,达到减小通带最大衰减和增大阻带最小衰减的目的^[7-8,10]。

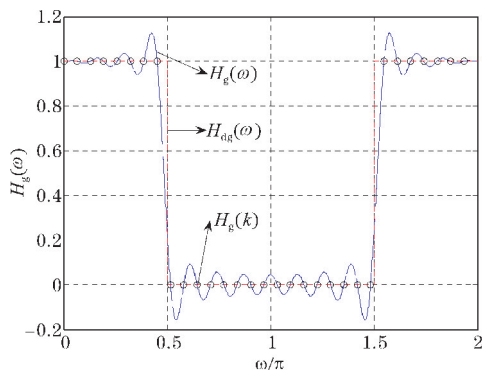
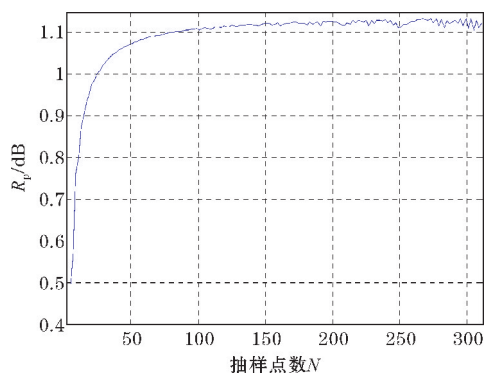
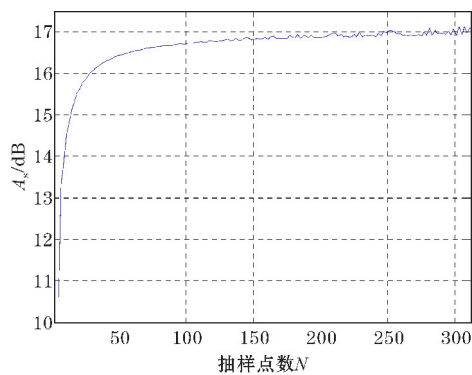


图1 频率抽样法设计的滤波器幅度响应
($N=31, \omega_p=0.5\pi$ 时的第一类低通 LPNDF)



(a) R_p



(b) A_s

图2 频率抽样法设计的滤波器 R_p 和 A_s 随 N 的变化曲线
($\omega_p=0.5\pi$ 时的第一类低通 LPNDF)

3 DE 算法

自然界中的生物体在遗传、变异和选择作用下,优胜劣汰、适者生存,不断由低级向高级进化和发展。DE 算法就是对这种进化规律(进化思想)的实质加以模式化(形式化)而形成的一种智能优化算法,通过群体内个体相互杂交和竞争产生的新群体智能地指导和

确定优化搜索方向。基本思想是在随机产生初始种群后,把种群中任意两个不相同个体的向量差与第三个个体求和产生新个体;然后比较新个体与当代种群中相应的个体,若新个体适应度优于当前个体适应度,则在下一代中用新个体取代旧个体,否则仍保存旧个体;通过不断地保留优良个体、淘汰劣质个体的进化操作,引导搜索向最优解逼近^[3-6]。

3.1 种群初始化

每一代种群都包含有 N_p 个个体多维实值向量。设 $G \in \{0, 1, \dots, G_{\max}\}$ 为种群进化的代数, $D \geq 1$ 为待优化问题的维数,则当前进化过程中的种群为 $P_G = \{X_{1,G}, X_{2,G}, \dots, X_{N_p,G}\}$, 其中第 i 个个体向量可表示为

$$X_{i,G} = \{x_{i,G}^1, x_{i,G}^2, \dots, x_{i,G}^D\}, i \in \{1, 2, \dots, N_p\} \quad (16)$$

由于待优化问题的每个个体变量存在一定的范围,为使初始种群应尽可能好的覆盖整个搜索空间并进行寻优操作,需要给定个体向量的最大值 $X_{\max} = \{x_{\max}^1, x_{\max}^2, \dots, x_{\max}^D\}$ 和最小值 $X_{\min} = \{x_{\min}^1, x_{\min}^2, \dots, x_{\min}^D\}$ 。代数 $G=0$ 时第 i 个个体向量的每一维变量取值由下面的约束条件生成:

$$x_{i,0}^j = x_{\min}^j + \text{rand}[0, 1]g(x_{\max}^j - x_{\min}^j), j \in \{1, 2, \dots, D\} \quad (17)$$

其中, $\text{rand}[0, 1]$ 表示介于 0 和 1 之间均匀分布的随机实数,为每个个体向量中每一维分量独立的参数。

3.2 变异操作

对于每一目标向量 $X_{i,G}$,按照如下的变异策略产生新一代的变异个体向量:

$$V_{i,G+1} = X_{r1,G} + Fg(X_{r2,G} - X_{r3,G}) \quad (18)$$

其中: $i, r1, r2, r3 \in \{1, 2, \dots, N_p\}$ 为随机选取的互不相同的整数; $F \in [0, 2]$ 为变异因子,控制差分向量 $(X_{r2,G} - X_{r3,G})$ 的缩放程度。在实际的应用中,当 F 为常数时, F 过小,会导致种群的多样性降低,造成算法早熟(搜索陷入局部最优解中); F 过大,则会导致算法的收敛性变差,求得的全局最优解精度降低。故增加如下的自适应变异算子:

$$F = F_0 g 2^{\exp\left(1 - \frac{G_{\max}}{1+G_{\max}-G}\right)} \quad (19)$$

其中, F_0 为初始变异因子。在算法迭代初期时, F 具有较大值(约为 $2F_0$),可以保持种群的多样性,避免早熟;随着迭代次数的增加, F 逐步减小、到后期接近于 F_0 ,能够保留优良的种群信息,避免破坏最优解,增加搜索到全局最优解的概率。

3.3 交叉操作

按照二项式交叉策略将父代目标个体向量 $X_{i,G}$ 与新生成的变异个体向量 $V_{i,G+1}$ 进行信息交换操作,形成

试验个体向量 $U_{i,G+1} = \{u_{i,G+1}^1, u_{i,G+1}^2, \dots, u_{i,G+1}^D\}$, 其中:

$$u_{i,G+1}^j = \begin{cases} v_{i,G+1}^j, & \text{rand}(j) \leq C_R \text{ or } j = j_{\text{rand}} \\ x_{i,G}^j, & \text{rand}(j) > C_R \text{ and } j \neq j_{\text{rand}} \end{cases} \quad j \in \{1, 2, \dots, D\} \quad (20)$$

$\text{rand}(j)$ 表示第 j 维分量在 $[0, 1]$ 区间均匀分布的随机取值, $C_R \in [0, 1]$ 代表预先设定的交叉概率, $j_{\text{rand}} \in \{1, 2, \dots, D\}$ 为随机选取的整数索引。交叉操作的使用增加了了解的多样性, $j = j_{\text{rand}}$ 保证了试验个体中一定有信息来自于变异个体。

3.4 选择操作

采用一对一的“贪婪选择”方式将试验向量 $U_{i,G+1}$ 与父代向量 $X_{i,G}$ 的适应度进行比较,适应度高的向量作为更好的个体被选中作为下一代 ($G+1$) 种群中的个体,促使种群的进化方向始终朝向全局最优解。公式为

$$X_{i,G+1} = \begin{cases} U_{i,G+1}, & \text{Fitness}(U_{i,G+1}) > \text{Fitness}(X_{i,G}) \\ X_{i,G}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (21)$$

其中: $\text{Fitness}(g)$ 为计算适应度值函数。

4 DE 算法在 LPNDF 设计中的实现

举例说明 DE 算法在频率抽样法 LPNDF 设计中的实现。

例 用频率抽样法设计一个第一类低通 LPNDF,技术指标要求:理想频率响应为矩形,通带截止频率 $\omega_p = 0.3\pi$,通带最大衰减 $R_p = 0.35$ dB,阻带最小衰减 $A_s = 65$ dB,过渡带宽度 $\Delta\omega \leq 0.1\pi$ 。

解 确定过渡带抽样点数为 $m=2$,滤波器长度 $N \geq 2\pi(m+1)/\Delta\omega = 60$,留富余量并取奇数 $N=61$ 。通带范围 k 的取值为 $0 \leq k \leq \text{int}[\omega_p N / (2\pi)]$ ($\text{int}(g)$ 为取整数运算),即 $0 \leq k \leq 9$,故过渡带的抽样值在 $k=10, 11$ 和 $k=50, 51$ 处,写出理想频率响应的抽样点值如下:

$$H_d(k) = \begin{cases} e^{-\frac{60}{61}\pi k}, & 0 \leq k \leq 9, 52 \leq k \leq 60 \\ S_1 e^{-\frac{60}{61}\pi k}, & k = 10, 51 \\ S_2 e^{-\frac{60}{61}\pi k}, & k = 11, 50 \\ 0, & 12 \leq k \leq 49 \end{cases} \quad (22)$$

其中, S_1 和 S_2 分别是待求解的过渡带样点值, $0 \leq S_1, S_2 \leq 1$ 。

利用 DE 算法寻找出最佳的 S_1 和 S_2 值,以获得最大的阻带最小衰减值。算法具体步骤如下:

步骤1 确定 DE 算法的控制参数(种群规模大小 N_p 、初始变异算子 F_0 、交叉算子 C_R 、变量维度 D 、寻优区间范围 X_{\max} 和 X_{\min} 、最大进化代数 G_{\max} 、终止条件等)和所要采用的具体策略(如变异策略、交叉策略、选择策略等)。

步骤2 进化代数 $G=0$, 用式(17)随机产生初始种群 $P_0 = \{X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{N_p,0}\}$, 计算初始种群中每个个体的目标函数值和适应度值。代数 G 的种群中第 i 个个体的目标函数值 $O_{i,G}$ 和适应度值 $\text{Fitness}_{i,G}$ 计算公式为

$$\begin{cases} O_{i,G} = \text{abs}\{\min\{e^{j\frac{N-1}{2}\omega} \text{gDFT}[\text{IDFT}[H_{di,G}(k)]]_{1024}\}\} \\ \text{Fitness}_{i,G} = \frac{1}{O_{i,G}} \end{cases} \quad (23)$$

其中: $H_{di,G}(k)$ 为代数为 G 时第 i 个个体的样本值(频响抽样值); $\text{DFT}(g)$ 和 $\text{IDFT}(g)$ 分别是离散傅立叶变换和离散傅立叶逆变换运算; 式中乘以 $e^{j\frac{N-1}{2}\omega}$ 的目的是抵消掉频谱函数中的相位特性, 只保留幅度特性部分; $\min(g)$ 和 $\text{abs}(g)$ 分别是取最小值和绝对值运算。

步骤3 进化代数 $G=G+1$, 进行变异操作和交叉操作, 并对边界条件进行处理(防止种群中个体范围超出给定范围), 得到中间种群 $Q_G = \{U_{1,G}, U_{2,G}, \dots, U_{N_p,G}\}$ 。边界处理算法如下:

$$u_{i,G}^j = \begin{cases} x_{\min}^j + \text{rand}[0,1]g(x_{\max}^j - x_{\min}^j), & u_{i,G}^j < x_{\min}^j \text{ or } u_{i,G}^j > x_{\max}^j \\ u_{i,G}^j, & \text{else} \end{cases} \quad j \in \{1, 2, \dots, D\} \quad (24)$$

步骤4 对中间种群 Q_G 进行评价, 计算 Q_G 中每个个体的目标函数值和适应度值。对中间种群 Q_G 中的个体和原种群 P_{G-1} 中对应的个体按照“一对一”策略比较适应度值, 作选择操作后得到新一代种群 P_G 。

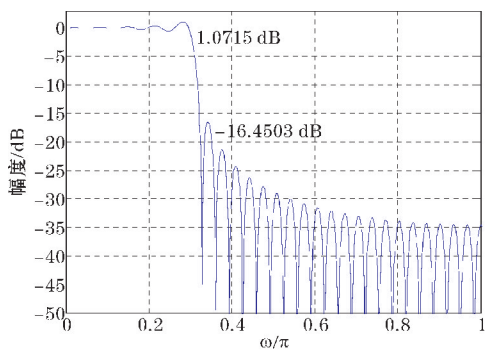
步骤5 计算新种群 P_G 中所有个体的目标函数值和适应度值, 找出目标函数最小值及对应的个体, 并保存。

步骤6 判断是否达到最大进化代数或满足终止条件; 若是, 则进化终止、结束算法, 寻找出所有进化代数中的最佳个体作为解输出; 否则, 转至步骤3。

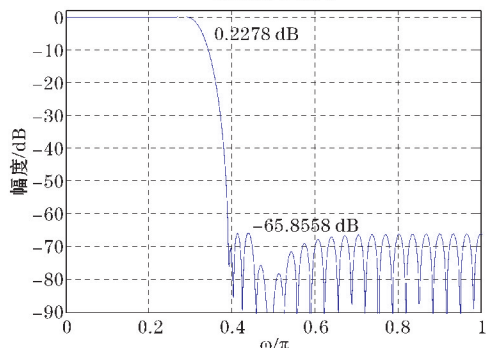
将求解出的过渡带最佳抽样值 S_1 和 S_2 代入式(22), 得 $H_d(k)$ 值。将 $H_d(k)$ 代入式(2), 得设计滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$; 代入式(4)或式(10), 即得频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

5 实验结果

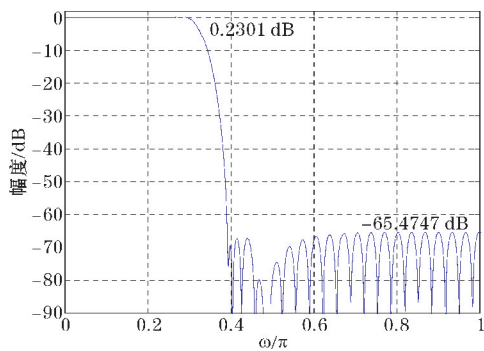
在 Intel(R) Celeron(R) N3350@1.10 GHz CPU、4.00 GB RAM 的个人计算机(安装有 Windows 10 64 位操作系统)上采用 MATLAB7.0 语言编写程序实现上节中的 DE 算法。其中: 种群规模大小 $N_p=250$, 待优化问题维数 $D=2$, 初始变异因子 $F_0=0.5$, 交叉因子 $C_R=0.7$, 寻优区间的上限和下限分别为 $X_{\max}=\{1,1\}$ 和 $X_{\min}=\{0,0\}$, 最大进化代数 $G_{\max}=100$, 无终止条件。为了节省计算时间, $\text{DFT}(g)$ 和 $\text{IDFT}(g)$ 运算分别采用快速的 FFT 和 IFFT 算法。实验结果如图3和表1所示, 由结果可以看出: 采用 DE 算法优化设计出低通滤波器的通带最大衰减 R_p 和阻带最小衰减 A_s 均达到设计指标, 幅频特性比传统的查表法和遗传算法^[7] 结果优越, 即滤波器的最大通带波动更小、最小阻带衰减更大。



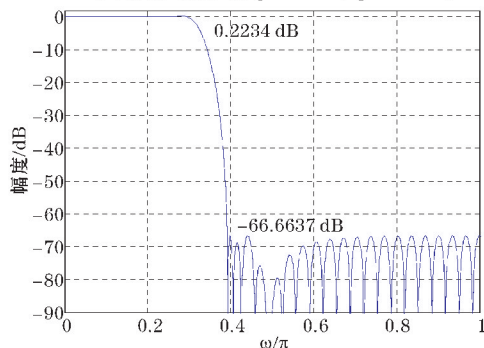
(a)没有优化时



(c)遗传算法优化时($S_1=0.58846, S_2=0.10549$)



(b)传统查表法时($S_1=0.58660, S_2=0.10466$)

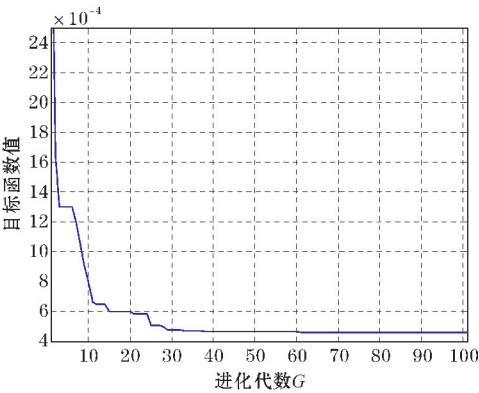


(d)DE算法优化时($S_1=0.59318, S_2=0.10933$)

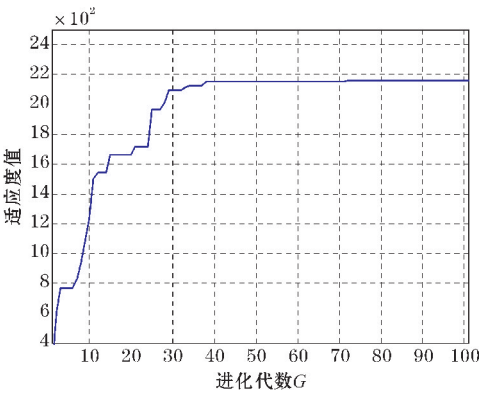
图3 设计的低通 LPNDF 幅频特性曲线($N=61, \omega_p=0.3\pi, D=2$)

表 1 DE 算法寻优结果与传统方法结果对比

	S_1	S_2	R_p/dB	A_s/dB
没有优化时	0	0	1.0715	16.4503
传统查表法	0.58660	0.10466	0.2301	65.4747
遗传算法	0.58846	0.10549	0.2278	65.8558
DE 算法	0.59318	0.10933	0.2234	66.6637



(a) 目标函数进化曲线



(b) 适应度进化曲线

图 4 DE 算法进化曲线

表 2 DE 算法程序运行时间

单位:s

次数	1	2	3	4	5	6	平均运行时间
运行时间	57.484375	57.843750	57.718750	56.968750	60.328125	57.812500	57.674479
次数	7	8	9	10	11	12	平均运行时间
运行时间	57.203125	57.765625	57.453125	57.250000	56.250000	58.015625	57.674479

图 4 采用 DE 算法搜索滤波器过渡带最佳采样点值时的目标函数和适应度进化曲线,可见随着进化代数的增加,目标函数值单调下降、适应度值单调上升,算法逐渐收敛;在经过 72 代的进化搜索后,获得最佳解(对应的目标函数值和适应度值分别是 4.6388×10^{-4} 、 2.15573×10^3)。表 2 是在控制参数相同的情况下 DE 算法连续运行 12 次的时间(利用 CPUTIME 函数计算出)和平均时间,由于 DE 算法采用概率转移规则进行全局寻优,所以算法每次的运行时间都不相同。结果表明:DE 算法所需的计算时间较短,且具有较好的稳健性。

6 结束语

介绍了频率抽样法数字滤波器设计的基本思想和 DE 算法的原理,推导出基于频率抽样技术的线性相位非递归数字滤波器的设计公式,并分析滤波器频率响应的误差特征;提出一种将 DE 算法应用于频率抽样法线性相位非递归数字滤波器的优化设计新方法,试验结果表明设计出的滤波器性能指标完全达到工程技

术要求,频率特性比传统设计方法优越。该方法具有控制变量少、稳健性和自适应性强、可靠性和效率高、收敛速度快、易于编程实现和应用、非常适合于并行计算等优点。若更改优化的目标函数,可以实现其他常规计算方法难以求解的非凸形、非线性、多模型、多峰值、多目标、高维等复杂环境中的函数优化问题以及组合优化问题、车间调度问题等。

参考文献:

[1] M B Joaquim, C A S Lucietto. A nearly optimum linear-phase digital FIR filters design [J]. Digital Signal Processing, 2011, 21(6): 690–693.

[2] S M Bozic. Relationships between impulse responses of non-recursive digital filters [J]. International Journal of Electronics, 2007, 45(2): 187–191.

[3] Yunlang Xu, Xiaofeng Yang, Zhile Yang, et al. An enhanced differential evolution algorithm with a new oppositional-mutual learning strategy [J]. Neurocomputing, 2021, 435: 162–175.

- [4] Zhiping Tan, Kangshun Li, Yi Wang. Differential evolution with adaptive mutation strategy based on fitness landscape analysis [J]. Information Sciences, 2021, 549: 142–163.
- [5] 夏莘媛, 刘伯颖, 李洋, 等. 一种改进的差分进化算法及其应用[J]. 河北工业大学学报, 2015, 44(1): 12–17.
- [6] Xuewen Xia, Ling Gui, Yinglong Zhang, et al. A Fitness-Based Adaptive Differential Evolution Algorithm [J]. Information sciences, 2021, 549: 116–141.
- [7] 邹娟, 贾世杰, 曾洁. 基于遗传算法的 FIR 滤波器设计[J]. 大连交通大学学报, 2010, 31(4): 22–25.
- [8] 朱凤杰, 焦瑞莉. 基于遗传算法的全频带优化 FIR 低通滤波器设计[J]. 北京信息科技大学学报, 2018, 33(4): 29–32.
- [9] 孙田雨, 史峥. 采用改进遗传算法优化 FIR 数字滤波器设计[J]. 计算机工程与应用, 2017, 53(17): 108–111.
- [10] 吴文亮. 改进的遗传算法在 FIR 滤波器设计中的应用研究[J]. 南通航运职业技术学院学报, 2015, 14(4): 54–58.
- [11] 王波, 胡军台, 张克勇, 等. 基于解空间定向优化的改进免疫算法研究及应用[J]. 火力与指挥控制, 2020, 45(12): 64–67.
- [12] 孙超, 李明, 陶海红. 一种基于梯度免疫算法的参差 MTI 滤波器设计[J]. 中国电子科学研究院学报, 2014, 9(2): 199–203.
- [13] 胡鑫楠. 基于改进型混沌粒子群优化算法的 FIR 高通数字滤波器设计[J]. 计算机科学, 2019, 46(S1): 601–604.
- [14] 王萍. 求解非线性约束优化问题的进化规划算法[J]. 牡丹江师范学院学报(自然科学版), 2015(1): 7–8.
- [15] 张俊杰, 仰继连. 蚂蚁算法在 FIR 数字滤波器优化设计中的参数[J]. 数据采集与处理, 2013, 28(3): 336–341.
- [16] 高西全, 丁玉美. 数字信号处理(第四版)[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2016: 508–509.

Design of Frequency Sampling Method based Linear Phase Non-recursive Digital Filters Using Differential Evolution Algorithm

HU Shibing

(College of Electronic Engineering, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: How to determine the optimal sampling point value of the filter transition band samples is a key problem in the design of non-recursive digital filters based on frequency sampling method (FSM). In this paper, an optimal optimization design method using differential evolution algorithm (DEA) for FSM-based linear phase non-recursive digital filters is proposed. First of all, the design formulae of linear phase non-recursive digital filters based on FSM are derived, and the error features of the frequency responses of the designed filters are analyzed. And then the value of the transition band samples is utilized as the variable to be optimized, the objective fitness function is designed with the stopband performance specification, and the optimal solution is searched out by taking advantage of the globality and the intrinsic parallelism of DEA. Finally, the concrete steps and experimental results of the algorithm are presented. The experimental data show that the value of the frequency transition band samples determined by DEA is optimal, and the maximum passband attenuation and the stopband minimum stopband attenuation of the designed non-recursive digital filters can reach 0.2234 dB and 66.6637 dB respectively, which are superior to other traditional design methods.

Keywords: differential evolution algorithm; frequency sampling method; linear phase; non-recursive digital filters; objective fitness function; optimization design