

文章编号: 2096-1618(2022)06-0627-08

基于改进差分进化算法的 II 型频率采样法 FIR 数字滤波器设计

胡仕兵, 聂 喜, 陈子为

(成都信息工程大学电子工程学院, 四川 成都 610225)

摘要:在传统差分进化算法的基础上,增加缩放因子自适应生成策略、交叉概率抛物线式动态产生策略和新个体基因边界检查和处理方法,提出一种改进差分进化算法并应用于采用 II 型频率采样法的 FIR 数字滤波器设计中。该优化设计方法以滤波器过渡带样点值为优化变量,以阻带最小衰减值作为优化目标并设计适应度函数,利用改进差分进化算法的全局寻优能力求解最优样点值。文中结合 FIR 数字高通、低通和带通滤波器设计的 3 个例子,给出算法实现的具体步骤和实验结果。实验数据表明:采用改进差分进化算法确定的滤波器过渡带样点值是最优的,设计的 FIR 数字滤波器频响特性(通带最大波动和阻带最小衰减)优于传统查表方法和遗传算法。

关键词:FIR 数字滤波器; II 型频率抽样法; 改进差分进化算法; 阻带最小衰减; 适应度函数; 优化设计

中图分类号:TN713+.7

文献标志码:A

doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2022.06.003

0 引言

频率采样法是设计 FIR 数字滤波器的常用方法之一^[1-2],分为 I 型和 II 型两种,对应的滤波器频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的 N 点采样值分别为 $H_d(k) = H_d(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ 和 $H_d(k) = H_d(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})}$, $0 \leq k \leq N-1$ 。对 I 型频率采样法应用和研究较广泛,而对 II 型频率采样法很少提及。实际上在对 FIR 滤波器频率响应拟合程度要求较高的场合,可以将 I 型频率采样法和 II 型频率采样法交替使用,以获得更精准的边界频率,两种采样法的边界频率拟合误差曲线如图 1 所示。

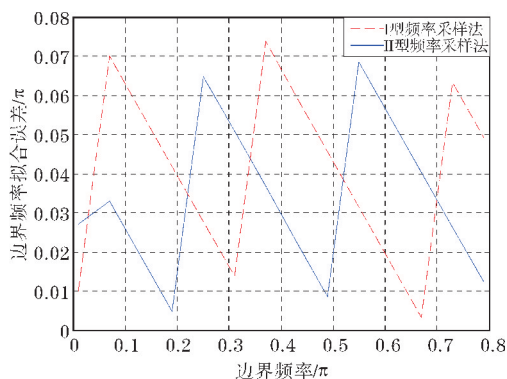


图 1 I 型和 II 型频率采样法 FIR 低通滤波器边界频率拟合误差曲线(过渡带宽 0.15π 、过渡带内 1 个样点)

在确定 FIR 数字滤波器的过渡带样点值时,采用了查表(look-up table, LUT)法^[3]、遗传算法(genetic algorithm, GA)^[4-7]、模拟退火算法(simulated annealing

algorithm, SAA)^[8]、蚁群优化算法(ant colony optimization algorithm, ACOA)^[9]、粒子群优化算法(particle swarm optimization algorithm, PSO)^[5,10-12]、免疫算法(immune algorithm, IA)^[13]、克隆选择算法(clonal selection algorithm, CSA)^[14-15]、自由搜索算法(free search algorithm, FSA)^[16]、水循环算法(water cycle algorithm, WCA)^[17]、人工鱼群算法(artificial fish swarm algorithm, AFSA)^[18]等,这些方法在一定程度上存在求得最优解的偏差过大、算法群体多样性较小、算法控制变量多、结构较复杂、寻优精度不高、收敛速度较慢、易于出现早熟收敛(易陷入局部最优解)和程序运行时间较长等缺陷。差分进化(differential evolution, DE)算法是由 Rainer Storn 等^[19-21]于 20 世纪末提出的一种基于模拟自然界生物的进化过程、求解连续空间上优化问题的高效、强大的随机种群搜索算法,由于其控制参数少、计算简单、易于实现等特点,引起广泛关注和研究。但是对于特定的优化问题,DE 算法也表现出对控制参数的设置敏感、收敛速度慢、种群搜索停滞和早熟收敛等问题^[21]。本文对 DE 算法进行改进,增加缩放因子自适应生成策略、交叉概率抛物线式动态产生策略和基因边界检查和处理方法,提出一种新的改进差分进化(modified differential evolution, MDE)算法并且应用于采用 II 型频率采样法设计 FIR 数字滤波器时过渡带样点值的优化中,取得了良好的实验效果。

1 MDE 算法

对于待优化的问题函数 f , 寻找参数 x_1, x_2, \dots, x_D

使 f 达到最小值:

$$y = \min \{f(x_1, x_2, \dots, x_D)\}, \quad \text{s. t.} \quad L_j \leq x_j \leq U_j, j=1, 2, \dots, D \quad (1)$$

其中: D 是解空间的维数, U_j 和 L_j 分别是第 j 个分量 x_j 取值范围的上界值和下界值。MDE 算法包括 4 个基本操作: 初始化种群、变异、交叉和选择。在初始化种群后, 算法循环执行变异、交叉和选择操作, 直到计算结果在预期的误差精度内或达到最大进化代数; 最后获得最优解。

1.1 种群初始化

设进化代数为 $G \in \{0, 1, \dots, G_{\max}\}$ 时的种群为 $P(G) = \{X_1(G), X_2(G), \dots, X_M(G)\}$, 其中: M 为种群规模大小, $X_i(G) = \{x_{i,1}(G), x_{i,2}(G), \dots, x_{i,D}(G)\}$ ($i=1, 2, \dots, M$) 表示第 G 代中的第 i 个个体 (染色体), $x_{i,j}(G)$ 表示第 G 代中第 i 个个体的第 j 个分量 (基因)。每个个体代表解空间内的某一个解, 而基因代表解的各个分量。种群初始化就是在解空间范围内随机均匀地产生 M 个个体, 每个个体由 D 维向量组成, 取值方式如下:

$$x_{i,j}(0) = L_j + \text{rand}(0, 1) \cdot (U_j - L_j), i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, D \quad (2)$$

其中, $\text{rand}(0, 1)$ 表示在 $(0, 1)$ 区间均匀分布的随机数。

1.2 变异运算

传统差分进化算法通过差分策略实现个体变异。对于每个个体 $X_i(G)$, 从种群中随机选择 3 个不同的个体 $X_{p_1}(G)$ 、 $X_{p_2}(G)$ 和 $X_{p_3}(G)$ ($i \neq p_1 \neq p_2 \neq p_3$) 生成变异向量 $H_i(G+1)$:

$$H_i(G+1) = X_{p_1}(G) + F \cdot [X_{p_2}(G) - X_{p_3}(G)] \quad (3)$$

其中: $F \in [0, 2]$ 为缩放因子 (常数), 用于控制差分向量 $X_{p_2}(G) - X_{p_3}(G)$ 的影响力。

F 值较大时能使算法在全局范围内搜索到有效解, 但会降低收敛速度; F 值较小时会降低种群的多样性, 导致陷入局部最优解, 收敛性能差。本文提出改进方法: 将 $X_{p_1}(G)$ 、 $X_{p_2}(G)$ 、 $X_{p_3}(G)$ 按照适应度值优劣进行排序得到个体向量 $X_{\text{best}}(G)$ 、 $X_{\text{middle}}(G)$ 和 $X_{\text{worst}}(G)$, 且有 $F_{\text{best}} = F[X_{\text{best}}(G)]$ 、 $F_{\text{middle}} = F[X_{\text{middle}}(G)]$ 和 $F_{\text{worst}} = F[X_{\text{worst}}(G)]$, $F(\cdot)$ 为计算个体适应度值函数, 采用以下的自适应调整策略生成变异向量 $H_i(G+1)$:

$$H_i(G+1) = X_{\text{best}}(G) + F_i \cdot [X_{\text{middle}}(G) - X_{\text{worst}}(G)] \quad (4)$$

其中:

$$F_i = F_L + (F_U - F_L) \frac{F_{\text{middle}} - F_{\text{best}}}{F_{\text{worst}} - F_{\text{best}}} \quad (5)$$

F_i 的取值根据生成差分向量的两个个体适应度值作自适应变化。式 (5) 中, F_L 和 F_U 分别是缩放因子的下限和上限, 取 $F_L = 0.1$, $F_U = 0.9$ 。自适应变异可以加快算法的收敛速度, 避免有时陷入局部最优点的缺陷。

1.3 交叉运算

引入交叉运算可以增强种群的多样性。对于每个目标个体 $X_i(G)$ 及其生成的变异个体 $H_i(G+1)$ 进行个体间的交叉操作生成实验向量 $V_i(G+1)$, 即按照一定的概率 CR 选择 $H_i(G+1)$ 或 $X_i(G)$ 的等位基因作为 $V_i(G+1)$ 的等位基因。为保证变异中间体 $\{H_i(G+1)\}$ 的每个染色体至少有一个基因遗传给下一代, 需要随机取出 $H_i(G+1)$ 中的第 j_{rand} 位基因作为 $V_i(G+1)$ 的第 j_{rand} 位等位基因。 $V_i(G+1)$ 的基因计算方式如下:

$$v_{i,j}(G+1) = \begin{cases} h_{i,j}(G+1), & \text{rand}(0, 1) \leq \text{CR} \text{ or } j = j_{\text{rand}} \\ x_{i,j}(G), & \text{else} \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\text{CR} \in [0, 1]$ 为交叉概率 (常数), j_{rand} 为 $\{1, 2, \dots, D\}$ 间的随机整数。

常数 CR 值较大时, 试验个体中的信息大多来自于变异个体, 使种群的多样性越来越好, 但容易忽略掉全局最优解, 算法容易出现早熟收敛现象; CR 值较小时, 试验个体中的信息大多来自目标个体, 会使种群性降低, 导致种群进化出现停滞现象。故提出如下抛物线式动态 CR 策略:

$$\text{CR}(G) = \text{CR}_L + \frac{G^2}{G_{\max}^2} (\text{CR}_U - \text{CR}_L) \quad (7)$$

其中, $\text{CR}(G)$ 为第 G 代的交叉概率, CR_U 和 CR_L 分别是交叉概率的上限值和下限值, 一般取 $\text{CR}_U = 1.0$ 、 $\text{CR}_L = 0.9$ 。这样 CR 在 0.9 处缓慢增长, 可以减小固定参数带来的不足。

1.4 选择运算

采用贪婪算法从实验向量 $V_i(G+1)$ 和原向量 $X_i(G)$ 中选择出适应度值更高的个体作为下一代种群的个体, 计算方式为

$$X_i(G+1) = \begin{cases} V_i(G+1), & F[V_i(G+1)] > F[X_i(G)] \\ X_i(G), & \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

选择操作保证了个体 $X_i(G+1)$ 一定优于或持平于 $X_i(G)$, 使算法最终一定会收敛到某个最优点 (可能是局部最优) 上; 而变异、交叉操作有助于解跳出局部最优达到全局最优。

1.5 边界检查和处理

为确保在进化过程中解的有效性,必须判断染色体中各基因是否超出边界,如果超出,则基因用随机方法重新生成或取边界值。假设 x'_j 是经过变异或者交叉操作后所得某个新个体的第 j 个基因,边界检查和处理算法为

$$x'_j = \begin{cases} L_j + \text{rand}(0,1) \cdot (U_j - L_j), & x'_j < L_j \text{ or } x'_j > U_j \\ x'_j, & \text{else} \end{cases} \quad \text{或} \quad x'_j = \begin{cases} L_j, & x'_j < L_j \\ U_j, & x'_j > U_j \\ x'_j, & \text{else} \end{cases} \quad (9)$$

2 Ⅱ型频率采样法设计 FIR 数字滤波器的原理

设待设计的理想滤波器频率特性为 $H_d(e^{j\omega})$, 对其在 ω 的一个周期 $[0, 2\pi)$ 等间隔地抽样 N 个点(第一个抽样点在 $\omega = \pi/N$ 处), 得

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N})n} = \sum_{n=0}^{N-1} [h(n) e^{-j\frac{\pi}{N}n}] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, 0 \leq k \leq N-1 \quad (10)$$

对 $H_d(k)$ 进行 N 点 IDFT, 可唯一地求得有限长序列 $h(n)$:

$$h(n) = e^{j\frac{\pi}{N}n} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})n}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (11)$$

式中 $h(n)$ 即为所设计的滤波器的单位脉冲响应, 其系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})n} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})n} z^{-n} = \frac{1+z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})} z^{-1}} \quad (12)$$

式中, $(1+z^{-N})$ 项的 N 个零点与求和式中每一项极点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})}$ 抵消, 故该系统为 FIR 系统。其频率响应 $H(e^{j\omega})$ 为

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{1}{N} \frac{1+e^{-j\omega N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})} e^{-j\omega}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) \frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}} (e^{j\frac{\omega N}{2}} + e^{-j\frac{\omega N}{2}})}{e^{-j[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})]} \{e^{j[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})]} - e^{-j[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})]}\}} = \frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cos \frac{\omega N}{2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_d(k) e^{-j\frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2})}}{j \sin \left[\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}(k+\frac{1}{2}) \right]} \quad (13)$$

以上便是Ⅱ型频率采样设计法的原理, $H(e^{j\omega})$ 即为设计出的滤波器频率响应。

3 线性相位 FIR 数字滤波器的Ⅱ型频率采样设计公式

FIR 数字滤波器具有线性相位的约束条件是 $h(n)$ 是实序列且满足 $h(n) = \pm h(N-1-n)$ 。将 $H_d(e^{j\omega})$ 表示成幅度函数 $H_{dg}(\omega)$ (可正可负的实函数) 和相位函数 $\theta(\omega)$ 的形式, 即 $H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega) e^{j\theta(\omega)}$ 。从而有

$$H_d(k) = H_g(k) e^{j\theta(k)}, 0 \leq k \leq N-1 \quad (14)$$

其中: $H_g(k) = H_{dg}(\omega) \big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N}} = H_{dg}(\frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N})$, $\theta(k) = \theta(\omega) \big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N}} = \theta(\frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N})$ 。

由式(10)可知

$$H_d(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})n} \quad (15)$$

因为 $h(n)$ 是实数, 可得

$$H_d(k) = H_d^*(N-1-k) \quad (16)$$

将式(14)代入式(16)中, 得

$$\begin{cases} H_g(k) = H_g(N-1-k) \\ \theta(k) = -\theta(N-1-k) \end{cases} \quad (17)$$

可见, $H_g(k)$ 和 $\theta(k)$ 分别以 $k = (N-1)/2$ 为对称中心呈偶对称和奇对称。

第一类线性相位 FIR 滤波器的相位函数条件为

$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$, 于是 $\theta(k) = -\frac{N-1}{2}(\frac{2\pi}{N}k + \frac{\pi}{N})$, 由此可得 $H_d(k)$ 的表达式为

N 为奇数时:

$$H_d(k) = \begin{cases} H_g(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2})}, & k=0, 1, \dots, (N-3)/2 \\ H_g(\frac{N-1}{2}), & k=(N-1)/2 \\ H_g(N-1-k) e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k-\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2})} = H_g(N-1-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2})}, & k=(N+1)/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (18)$$

N 为偶数时:

$$H_d(k) = \begin{cases} H_g(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2})}, & k=0, 1, \dots, (N/2-1) \\ H_g(N-1-k) e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k-\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2})} = -H_g(N-1-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2})}, & k=N/2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (19)$$

将式(18)和式(19)分别代入式(13)中, 经化简后得频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的表示式为

N 为奇数时:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \frac{H_g\left(\frac{N-1}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} + \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} \frac{H_g(k)}{N} \left[\frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)/2\right]} + \frac{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)/2\right]} \right] \right\} \quad (20)$$

N 为偶数时:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{H_g(k)}{N} \left[\frac{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)/2\right]} + \frac{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)/2\right]} \right] \right\} \quad (21)$$

由式(13)、式(20)和式(21)可知:在抽样点 $\omega = \frac{2\pi}{N}(k + \frac{1}{2})$ ($0 \leq k \leq N-1$) 上,频率响应 $H(e^{j\omega})$

与理想频响 $H_d(e^{j\omega})$ 严格相等;在抽样点之间, $H(e^{j\omega})$ 为 $H_d(k)$ 的加权内插函数的延伸叠加; $H_d(e^{j\omega})$ 变化越平缓,内插越接近理想值,逼近误差越小。图2的仿真曲线证实了这一结论,其中 $H_g(\omega)$ 是实际滤波器频响函数 $H(e^{j\omega})$ 去掉相位特性后的幅度响应函数。通常设计出的滤波器的通带最大波动 R_p 为1.2 dB左右,阻带最小衰减 A_s 为18 dB左右,不能满足一般工程上的要求^[1-2];可以在滤波器过渡带内增加一些样点,以达到提高阻带最小衰减 A_s 和减小通带最大波动 R_p 的目的。本文就是采用 MDE 优化算法找出出这些样点的最佳值。

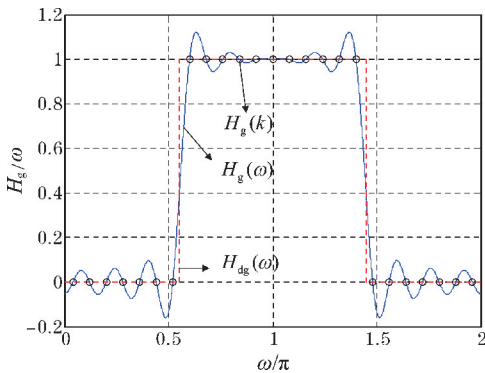


图2 II型频率抽样法设计的FIR高通数字滤波器
幅度响应 ($N=25, \omega_p=0.55\pi$)

4 实验与结果分析

4.1 FIR 高通数字滤波器设计实验

用II型频率采样法设计一个第一类线性相位FIR高通数字滤波器,要求理想频率响应为陡变矩形,通带截止频率 $\omega_p = 0.43\pi$,阻带最小衰减 $A_s \geq 40$ dB,过渡带宽度 $\Delta\omega \leq 0.08\pi$ 。

解:由于要求 $A_s \geq 40$ dB,确定滤波器过渡带样点数为 $m=1$ 。FIR 滤波器长度为 $N \geq 2\pi(m+1)/\Delta\omega = 50$,因为设计的是高通滤波器, N 必须为奇数,取 $N=51$ 。通带范围 k 的取值为 $\lceil \omega_p N / (2\pi) - 1/2 \rceil \leq k \leq N-1 - \lceil \omega_p N / (2\pi) - 1/2 \rceil$ ($\lceil d \rceil$ 表示对 d 朝 $+\infty$ 方向取最小整数),即 $11 \leq k \leq 39$,故过渡带的样点值 D_1 在 $k=10, 40$ 处,全部频率响应的样点值如下:

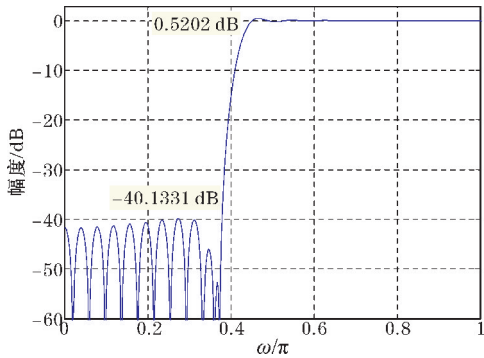
$$H_d(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq 9, 41 \leq k \leq 50 \\ D_1 \cdot \exp\left[-j\frac{50\pi}{51}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right], & k=10, 40 \\ \exp\left[-j\frac{50\pi}{51}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right], & 11 \leq k \leq 39 \end{cases} \quad (22)$$

本文以获得最大的滤波器阻带最小衰减值为优化目标,因此计算个体适应度值函数为

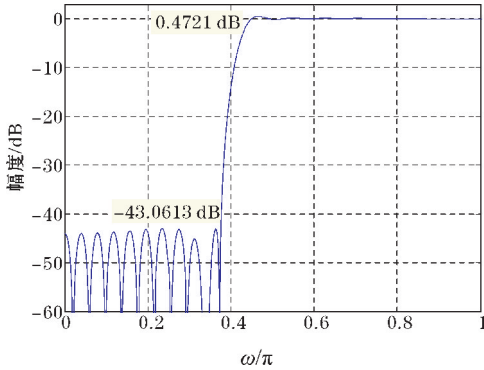
$$F(\cdot) = \frac{1}{\left| \min \left\{ e^{j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot \text{DFT} \left[e^{j\frac{\pi}{N}n} \cdot \text{IDFT} [H_d(k)] \right] \right\}_{1024} \right|} \quad (23)$$

其中: $\text{DFT}(\cdot)$ 和 $\text{IDFT}(\cdot)$ 分别为离散傅里叶变换和离散傅里叶逆变换运算,为节省计算时间,采用快速的FFT和IFFT算法。为了只保留滤波器频谱函数中幅度特性部分,式中乘以 $e^{j\frac{N-1}{2}\omega}$ 以抵消相位特性信息, $\min(\cdot)$ 为取最小值运算。

在安装有 Windows10 64 位操作系统的 Intel(R) Celeron(R) N3350@1.10 GHz CPU、4.00GB RAM 的PC机上用 MATLAB7.0 编写程序实现本例的MDE算法。其中算法参数设置为:种群规模大小 $M=250$,解空间维数为 $D=1$,寻优范围上界值 $U_1=1$ 和下界值 $L_1=0$,最大进化代数 $G_{\max}=100$ 。实验结果如图3和图4所示,可见采用LUT法和MDE算法设计的FIR高通滤波器都达到了设计指标,但LUT法设计的滤波器通带最大波动值(0.5202 dB)大于MDE算法(0.4721 dB),且阻带最小衰减值(40.1331 dB)比MDE算法(43.0613 dB)小,所以MDE算法效果优越。该例MDE算法在经过22代的进化搜索后获得最佳解 $D_1=0.38324$,对应的适应度值为 1.4226×10^2 ;程序运行的平均时间(取10次运行的平均值)为53.3141秒。



(a) LUT 法 ($D_1=0.35360718$)



(b) MDE 算法 ($D_1=0.38324$)

图 3 II 型频率抽样法设计的 FIR 高通数字滤波器幅频响应曲线 ($N=51, \omega_p=0.43\pi, D=1$)

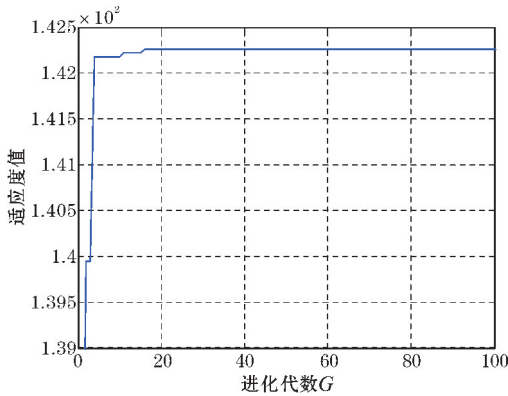


图 4 设计 FIR 高通数字滤波器时 MDE 算法适应度进化曲线

4.2 FIR 低通数字滤波器设计实验

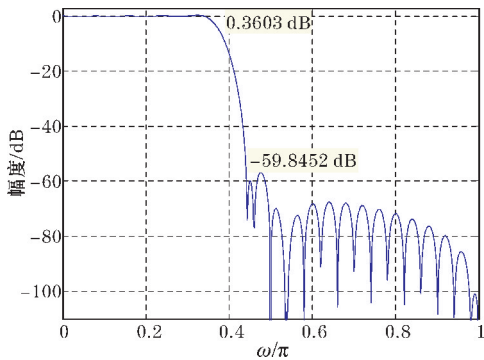
利用 II 型频率采样法设计一个第一类线性相位

FIR 低通滤波器,理想通带截止频率 $\omega_p=0.35\pi$,允许过渡带带宽 $\Delta\omega=0.12\pi$,阻带最小衰减 $A_s=60$ dB。

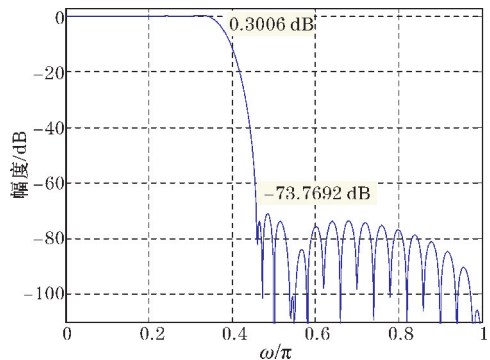
解:因为阻带最小衰减 $A_s=60$ dB,过渡带样点数取为 $m=2$,FIR 滤波器长度为 $N=2\pi(m+1)/\Delta\omega=50$ 。通带范围 $0 \sim \omega_p$ 相当于 k 的范围为 $0 \leq k \leq \lfloor \omega_p N/(2\pi) - 1/2 \rfloor$ ($\lfloor d \rfloor$ 表示对 d 朝 0 方向取最大整数),即 $0 \leq k \leq 8$,故过渡带的抽样值 D_1, D_2 应分别选在 $k=9, 40$ 和 $k=10, 39$ 处,写出频率响应的抽样点值为

$$H_d(k) = \begin{cases} \exp\left[-j\frac{49\pi}{50}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right], & 0 \leq k \leq 8 \\ D_1 \cdot \exp\left[-j\frac{49\pi}{50}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right], & k=9 \\ D_2 \cdot \exp\left[-j\frac{49\pi}{50}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right], & k=10 \\ 0, & 11 \leq k \leq 38 \\ -D_2 \cdot \exp\left[-j\frac{49\pi}{50}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right], & k=39 \\ -D_1 \cdot \exp\left[-j\frac{49\pi}{50}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right], & k=40 \\ -\exp\left[-j\frac{49\pi}{50}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right], & 41 \leq k \leq 49 \end{cases} \quad (24)$$

在用 MATLAB7.0 编程实现该算法时,计算个体适应度值函数与式(23)相同,只是 min 函数操作的对象是设计出滤波器幅度函数 $H_g(\omega)$ 的前 512 个样点值(因为第一类线性相位 FIR 数字滤波器在单位脉冲响应长度 N 为偶数时, $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称);算法参数与 4.1 节完全相同,不同的是解空间维数 $D=2$,寻优范围上界值 $U_{1,2}=1$,下界值 $L_{1,2}=0$ 。实验结果如图 5 和图 6 所示,可见 MDE 算法设计出的 FIR 低通滤波器通带最大波动值 (0.3006 dB) 小于 LUT 法 (0.3603 dB),阻带最小衰减 (73.7692 dB) 比 LUT 法 (59.8452 dB) 大得多,并且 LUT 法设计的滤波器阻带最小衰减没有达到设计指标,因而 MDE 算法效果明显优于传统 LUT 法。该例 MDE 算法在经过 77 代的进化搜索后获得最佳解 $D_1=0.54297, D_2=0.084864$,对应的适应度值为 4.88139×10^3 ;程序的平均运行时间为 52.8375 秒。



(a) LUT 法 ($D_1=0.49149549, D_2=0.05029373$)



(b) MDE 算法 ($D_1=0.54297, D_2=0.084864$)

图 5 II 型频率抽样法设计的 FIR 低通数字滤波器幅频响应曲线 ($N=50, \omega_p=0.35\pi, D=2$)

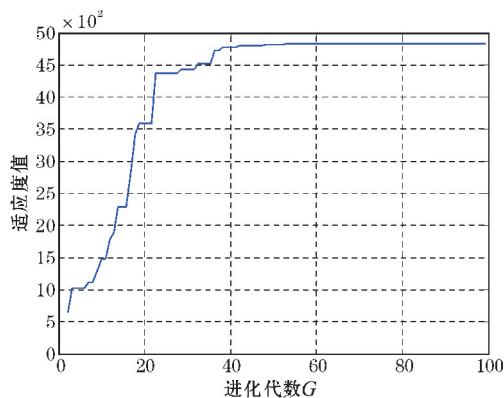


图6 设计 FIR 低通数字滤波器时 MDE 算法适应度进化曲线

4.3 FIR 带通数字滤波器设计实验

试利用 II 型频率采样法设计一个理想频率响应为矩形的线性相位 FIR 带通滤波器,技术指标为:通带下边界频率和上边界频率分别为 $\omega_{p1} = 0.35\pi$ 和 $\omega_{p2} = 0.7\pi$,阻带下边界频率和上边界频率分别为 $\omega_{s1} = 0.25\pi$ 和 $\omega_{s2} = 0.8\pi$,通带波纹 $R_p = 0.5$ dB,阻带最小衰减 $A_s \geq 60$ dB。

解:需要过渡带抽样点数为 $m = 2$,过渡带宽度 $\Delta\omega = \omega_{p1} - \omega_{s1} = \omega_{s2} - \omega_{p2} = 0.1\pi$,于是滤波器的长度点数为 $N \geq 2\pi(m+1)/\Delta\omega = 60$,取 $N = 60$,各边界频率的抽样点值 k 分别为: $k_{\omega_{s1}} = \lceil \omega_{s1} N / (2\pi) - 1/2 \rceil = 7$, $k_{\omega_{p1}} = \lceil \omega_{p1} N / (2\pi) - 1/2 \rceil = 10$, $k_{\omega_{p2}} = \lfloor \omega_{p2} N / (2\pi) - 1/2 \rfloor = 20$, $k_{\omega_{s2}} = \lfloor \omega_{s2} N / (2\pi) - 1/2 \rfloor = 23$ 。故过渡带抽样值 D_1, D_2 应分别位于 $k = 8, 22, 37, 51$ 和 $k = 9, 21, 38, 50$ 处,于是有

$$H_d(k) = H_g(k) e^{j\theta(k)} \quad (25)$$

其中:

$$H_g(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq 7, 23 \leq k \leq 36, 52 \leq k \leq 59 \\ D_1, & k = 8, 22 \\ D_2, & k = 9, 21 \\ 1, & 10 \leq k \leq 20 \\ -D_1, & k = 37, 51 \\ -D_2, & k = 38, 50 \\ -1, & 39 \leq k \leq 49 \end{cases} \quad (26)$$

$$\theta(k) = -\frac{59\pi}{60} \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad 0 \leq k \leq 59 \quad (27)$$

在用 MATLAB7.0 编程实现时,算法参数以及计算个体适应度值函数与 4.2 节完全相同。实验结果如图 7 和图 8 所示,由结果可以看出:采用 MDE 算法优化设计的 FIR 带通滤波器通带最大波动 R_p 和阻带最小衰减 A_s 均满足设计要求,且具有比传统 LUT 法更好的幅频响应性能,即滤波器的通带波动较小、阻带衰减

更大。该例 MDE 算法在经过 52 代的进化搜索后获得最佳解 $D_1 = 0.11173, D_2 = 0.59742$,对应的适应度值为 1.21487×10^3 ;程序的平均运行时间为 54.1125 秒。

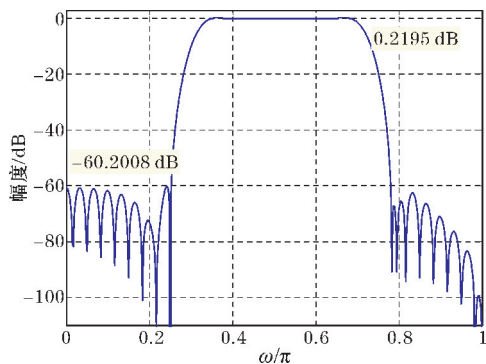
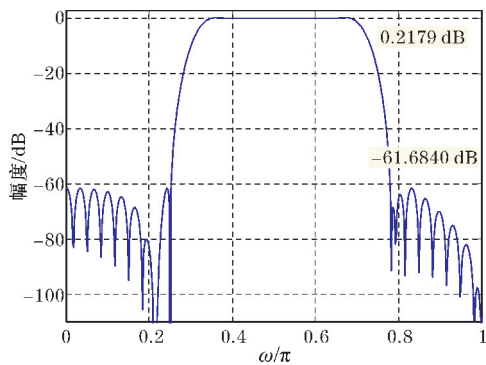
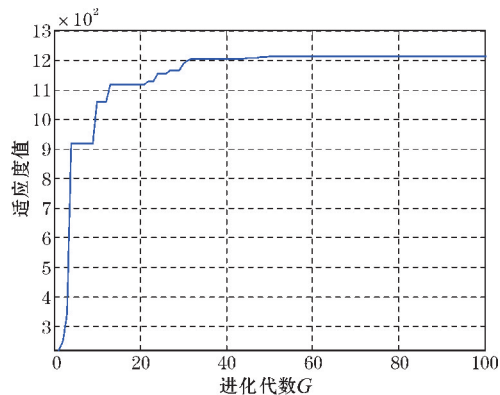
(a) LUT 法 ($D_1 = 0.11203003, D_2 = 0.59676391$)(b) MDE 算法 ($D_1 = 0.11173, D_2 = 0.59742$)图7 II型频率抽样法设计的 FIR 带通数字滤波器幅频响应曲线 ($N = 60, \omega_{s1} = 0.25\pi, \omega_{p1} = 0.35\pi, \omega_{p2} = 0.7\pi, \omega_{s2} = 0.8\pi, D = 2$)

图8 设计 FIR 带通数字滤波器时 MDE 算法适应度进化曲线

4.4 实验结果数据对比分析

表 1 为实验结果数据对比,其中 GA 法数据为根据 3 个不同实验的适应度函数调用 MATLAB7.0 优化工具箱内置函数 $[x, fval] = \text{ga}(\text{fitnessfun}, \text{nvars}, \text{options})$ [22] 求得最优解的结果。可以清楚地看出,本文提出的 MDE 算法设计出的 FIR 高通、低通、带通数字滤波器各项指标均达到设计要求,具有比传统 LUT 法和 GA 法更为优越的性能(通带最大波动 R_p 更小、阻带最小衰减 A_s

更大)。由于 MDE 算法保留最好的个体到下一代中,所以在进化的过程中,适应度值是一随进化代数增加而单调上升的过程,算法逐渐收敛且收敛精度高。多次运算结果表明:MDE 算法能以最短的时间、最为精确地搜索到全局最优解,且算法的健壮性更强。

表1 MDE 算法与 LUT 法、GA 法的实验结果比较

算例	方法	D_1	D_2	通带最大波动/dB	阻带最小衰减/dB	平均运行时间/s
4.1 节	没有优化时	0	—	1.0739	16.4262	—
	LUT 法	0.35360718	—	0.5202	40.1331	—
	GA 法	0.3775	—	0.4815	42.4160	—
	MDE 算法	0.38324	—	0.4721	43.0613	53.3141
4.2 节	没有优化时	0	0	1.2289	17.6647	—
	LUT 法	0.49149549	0.05029373	0.3603	59.8452	—
	GA 法	0.5153	0.0684	0.3353	67.9030	—
	MDE 算法	0.54297	0.084864	0.3006	73.7692	52.8375
4.3 节	没有优化时	0	0	1.1591	15.2589	—
	LUT 法	0.11203003	0.59676391	0.2195	60.2008	—
	GA 法	0.1109	0.5964	0.2189	61.5291	—
	MDE 算法	0.11173	0.59742	0.2179	61.6840	54.1125

5 结束语

本文采用Ⅱ型频率采样法设计 FIR 数字滤波器的基本原理,推导第一类线性相位 FIR 数字滤波器的Ⅱ型频率采样设计公式;针对传统差分进化算法的特点,提出一种改进的差分进化算法并设计相应的适应度函数,应用于采用Ⅱ型频率采样法设计 FIR 数字滤波器的过渡带样点值优化中。实验验证了改进差分进化算法控制参数少、结构简单、收敛速度更快、寻优精度更高、稳定性和鲁棒性更好,设计出的 FIR 数字滤波器性能显著优于传统查表法和遗传算法。若更改优化的目标函数,该改进差分进化算法也可以实现常规计算方法难以求解的高维、多目标、多模型、多峰值、非线性、非凸形等复杂环境中的函数优化问题和组合优化问题等。

致谢:感谢 2022 年成都信息工程大学大学生创新创业训练计划项目(202210621118);2021 年成都信息工程大学电子工程学院教学改革项目对本文的资助

参考文献:

[1] 高西全,丁玉美.数字信号处理[M].4 版.西安:西安电子科技大学出版社,2016.

[2] 杨会成.数字信号处理[M].北京:国防工业出版社,2012.

[3] Lawrence R. Rabiner, Bernard Gold, et al. An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters[J]. IEEE Transactions on Au-

dio and Electroacoustics,1970,18(2):83-106.

[4] Ervin Szopos, Marius Neag, Ioana Saracut, et al. Synthesis Tool Based on Genetic Algorithm for FIR Filters with User-Defined Magnitude Characteristics[J]. Circuits, Systems & Signal Processing, 2016, 35(1):253-279.

[5] Kamal Boudjelaba, Frédéric Ros, Djamel Chikouche. Potential of Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithms for FIR Filter Design[J]. Circuits, Systems & Signal Processing, 2014, 33(10):3195-3222.

[6] 陈小平,于盛林.遗传算法在 FIR 滤波器设计——频率抽样法中的应用[J].电子学报,2000,28(10):118-120.

[7] 芦成刚.基于遗传算法的 FIR 滤波器优化设计[D].延边:延边大学,2006.

[8] 程玲.模拟退火算法在分裂系构造中的应用[D].上海:上海交通大学,2010.

[9] 刘婷婷.蚁群优化算法改进及应用研究[D].通辽:内蒙古民族大学,2020.

[10] 陈晓文.基于粒子群算法的 FIR 滤波器的优化设计[J].宁德师范学院学报(自然科学版),2019,31(3):257-262.

[11] 李辉,张安,赵敏,等.粒子群优化算法在 FIR 数字滤波器设计中的应用[J].电子学报,2005,33(7):1338-1341.

[12] Pavani Uday Kumar, Kaladhara Sarma G R C,

- Mohan Das S, et al. Design of Optimal Digital FIR Filter Using Particle Swarm Optimization Algorithm [J]. *Advances in Computational Science, Engineering and Information Technology*, 2013, 225:187–196.
- [13] 高建峰. 免疫算法及其在数字滤波器设计中的应用[D]. 苏州: 苏州大学, 2005.
- [14] 王琼, 全书海, 徐化伟, 等. 基于克隆选择算法的 FIR 滤波器的设计[J]. *武汉理工大学学报*, 2007, 29(8):125–127.
- [15] Berna Haktanirlar Ulutas, Sadan Kulturel-Konak. A review of clonal selection algorithm and its applications [J]. *Artificial Intelligence Review*, 2011, 36(2): 117–138.
- [16] 任伟. 自由搜索算法在数字滤波器优化设计中的应用研究[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2014.
- [17] Hadi Eskandar, Ali Sadollah, Ardeshir Bahreininejad, et al. Water cycle algorithm - A novel meta-heuristic optimization method for solving constrained engineering optimization problems[J]. *Computers & Structures*, 2012, 110–111:151–166.
- [18] 何迎盛. 人工鱼群智能优化算法的改进与应用研究[D]. 南昌: 江西理工大学, 2015.
- [19] Rainer Storn, Kenneth Price. Differential Evolution-A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces[J]. *Journal of Global Optimization*, 1997, 11(4):341–359.
- [20] Rainer M Storn, Kenneth V Price, Jouni A Lampinen. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization* [M]. Springer International Publishing, Berlin, 2005.
- [21] 糜培培. 基于云计算的改进差分进化算法的研究与实现[D]. 成都: 电子科技大学, 2018.
- [22] 贺超英. *MATLAB 应用与实验教程* [M]. 4 版. 北京: 电子工业出版社, 2021.

The Design of FIR Digital Filters Using Type-II Frequency Sampling Method based on Modified Differential Evolution Algorithm

HU Shibing, NIE Xi, CHEN Ziwei

(College of Electronic Engineering, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: On the basis of the traditional differential evolution (TDE) algorithm, an adaptive generation strategy for the scalar factor, a parabolic dynamic generation strategy for the crossover probability and a method for checking and processing the boundary of the new individual's genes are added into the TDE algorithm. A modified differential evolution (MDE) algorithm is proposed accordingly and applied to the design of FIR digital filters using type-II frequency sampling method. The sample values of the filters in the transition bands are taken as the optimization variables; the minimum stopband attenuation is used as the optimization objective to design the corresponding fitness function; the global excellent searching ability of the MDE algorithm are employed to solve the best sample values by this optimal design method. Three examples of the design of digital FIR based on high-pass, low-pass and band-pass filters are given in this paper, and the detailed procedures and experimental results of the implementation of the algorithm are also presented. The experimental data have shown that the sample values of the filters in the transition bands determined by the MDE algorithm are optimal, and the frequency response characteristics (maximum passband ripple and minimum stopband attenuation) of the FIR digital filters designed are superior to the traditional look-up table method and genetic algorithm.

Keywords: FIR digital filters; type-II frequency sampling method; modified differential evolution algorithm; minimum stopband attenuation; fitness function; optimal design