文章编号: 2096-1618(2023)02-0236-04

关于 $f'(z)-af^2(z)$ 的值分布探讨

杨 拍[1], 邓 松[1], 杨锦华[2]

(1. 成都信息工程大学应用数学学院,四川 成都 610225;2. 新疆师范大学数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 运用 Nevanlinna 的亚纯函数值分布理论和正规族理论方法,研究了超越亚纯函数的值分布理论,进一步推广 Hayman 的结果,丰富了亚纯函数值分布理论。

关 键 词: 亚纯函数;正规族;值分布

中图分类号: O174.52 **文献标志码:** A

doi: 10.16836/j.cnki.jcuit.2023.02.016

0 引言

Hayman[1]证明了以下结果。

定理 A 设 a 为非零有穷复数,f 为超越亚纯函数,$n(\geqslant 5)$ 为一个正整数,则 $f'-af^n$ 取任意有穷复数无穷多次。

对于 $n=3,4$,定理 A 不成立。事实上,Mues[2]证实当 $n=3,4$ 时,对于每个非零有穷复数 b,都存在一个超越函数 f 使得 $f'-af^n\neq b$。

设有理函数 $R=\dfrac{P}{Q}$,其中 P 和 Q 是互质多项式。记 $\deg(R):=\deg(P)-\deg(Q)$,称整数 $\deg(R)$ 为有理函数 R 次数。

本文讨论了定理 A 中 $n=2$ 的情形,证明了如下结果。

定理 1 设 $R(\neq 0)$,S 为有理函数,f 为超越亚纯函数,极点重级至少为 3(至多有限个极点例外)。如果 f 的级大于 $2+\max\{\deg(R)+\deg(S),0\}$,则 $f'-Rf^2-S$ 在复平面上有无限多个零点。

推论 1 设 a 为非零有穷复数,f 为超越亚纯函数,极点重数至少为 3。如果 f 的级大于 2,则 $f'(z)-af^2(z)$ 取任意有穷复数无穷多次。

1 符号

符号$\mathbb{C}$ 表示复平面,D 表示$\mathbb{C}$ 上的一个区域,对于 $z_0\in\mathbb{C}$ 和 $r>0$,记

$$\bar{\Delta}(z_0,r):=\{z\,\|\,z-z_0|\leqslant r\},\Delta(z_0,r):=\{z\,\|\,z-z_0|<r\}$$

$$\Delta'(z_0,r):=\{z|0<|z-z_0|<r\},\Delta:=\Delta(0,1)$$

$n(r,f)$ 表示 $f(z)$ 在 $\Delta(0,r)$ 的极点个数(计算重数)。$f_n\overset{\chi}{\Rightarrow}f$ 表示函数列$\{f_n\}$在 D 内按球面距离内闭一致收敛于 f,$f_n\Rightarrow f$ 表示$\{f_n\}$在 D 内通常意义下(按欧式距离)内闭一致收敛于 f。

记 $f^{\#}(z):=\dfrac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$,$S(D,f):=\dfrac{1}{\pi}\iint_D[f^{\#}(z)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$S(r,f):=S(\Delta(0,r),f)$。

Ahlfors-Shimizu 特征函数定义为

$$T(r,f)=\int_0^r\frac{S(t,f)}{t}\mathrm{d}t,$$

亚纯函数 f 的级 $\rho(f)$ 定义为

$$\rho(f):=\limsup_{r\to\infty}\frac{\lg T(r,f)}{\lg r}。$$

2 辅助引理

引理 1[3-6] 设$\mathcal{F}$为 D 内只有重级零点的亚纯函数族,如果$\mathcal{F}$在点 z_0 处不正规,则存在点列 $z_n\to z_0$;函数列 $f_n\in\mathcal{F}$;正数列 $\rho_n\to 0$ 使得在$\mathbb{C}$ 上。有:

$$\rho_n^{-1}f_n(z_n+\rho_n\zeta)=g_n(\zeta)\overset{\chi}{\Rightarrow}g(\zeta)$$

其中 g 是$\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数。特别地,g 的级最多为 2。

引理 2[7] 设$\{f_n\}$是单位圆 Δ 内只有重级零点的亚纯函数族,如果存在点列 $a_n\to 0$ 和 $f_n^{\#}(a_n)\to\infty$,则存在(i)点列 $z_n\to 0$;(ii)$\{f_n\}$的子序列(仍用$\{f_n\}$表示);(iii)正数 $\rho_n\leqslant\dfrac{M}{\sqrt{f_n^{\#}(a_n)}}$,其中 M 是一个与 n 无关的常数,使得在复平面$\mathbb{C}$ 上 $\rho_n^{-1}f_n(z_n+\rho_n\zeta)=g_n(\zeta)\overset{\chi}{\Rightarrow}g(\zeta)$,其中 g 是$\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数。特别地,g 的级至多为 2。

引理 3[8] 设 f,g 是 $\Delta(0,\rho)$ 内的亚纯函数,且 r,

收稿日期: 2021-12-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(12061077、11961068)

R 满足关系 $r<R<\rho$,则

$$S(r,fg)\leqslant S(R,f)+S(R,g)+\frac{1}{2\pi}\left(\lg\frac{R}{r}\right)^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\lg(|g(re^{i\theta})|+|g(re^{i\theta})|^{-1})\mathrm{d}\theta$$

引理 4[9]　设 f 为级 $\rho>2$ 的亚纯函数,$\alpha\in\left[0,\frac{\rho-2}{2}\right)$和 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\rho-2-2\alpha}{2}\right)$表示两个常数。则存在 $\delta_n\to0$和 $a_n\to\infty$,使得 $\delta_n\leqslant|a_n|^{-\alpha}$,$f^{\#}(a_n)\geqslant|a_n|^{\frac{\rho-2-\varepsilon}{2}}$和 $S(\Delta(a_n,\delta_n),f)\geqslant|a_n|^{\rho-2-2\alpha-\varepsilon}$。

引理 5[10]　设f是有穷级的非常数亚纯函数,零点重级至少为2。如果存在非零常数 c,使得$f'(z)\neq c$,则$f(z)=\frac{c(z-a)^2}{z-b}$,其中 a 和 $b(\neq a)$为常数。

引理 6　设f是有穷级的非常数亚纯函数,零点的重级至少为3,则f'能取到任意的非零有穷复数。

证明:(反证法)假设存在一个非零有穷复数 c,使得$f'\neq c$。根据引理 5,$f(z)=\frac{c(z-a)^2}{z-b}$,其中 a 和$b(\neq a)$为常数。这与f的零点重级至少为 3 相矛盾。

引理 7　设$\{f_n\}$是 D 内亚纯函数族,极点重级至少为 3。设$\{R_n\}$是全纯函数族,在 D 内 $R_n\Rightarrow R$,其中 $R(\neq0)$在 D 内全纯;$\{S_n\}$是全纯函数的族,在 D 内 $S_n\Rightarrow S$,其中 S 在 D 内全纯。如果对任意的 n 和任意的 z,都有$f_n'-R_nf_n^2-S_n\neq0$, 则$\{f_n\}$在 D 内是正规的。

证明:当 n 足够大时,有

$$\frac{f_n'(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}-\frac{S_n(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}-1\neq0\tag{1}$$

事实上,对于足够大的 n:

(i)如果$f_n(z_0)\neq0,\infty$,则式(1)成立;

(ii)如果$f_n(z_0)=0$,则$f_n'(z_0)\neq S_n(z_0)$,因此 z_0 是$\frac{f_n'(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}-\frac{S_n(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}-1$ 的一个极点;

(iii)如果 $f_n(z_0)=\infty$,则 z_0 是$\frac{f_n'(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}-\frac{S_n(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}$的一个零点。

假设$\{f_n\}$在 $z_0\in D$ 处不正规,记 $g_n:=\frac{1}{R_nf_n}$。显然,当 n 足够大时,g_n 的零点重级至少为 3,且$\{g_n\}$在 z_0 处也不正规。

根据引理 1,存在点列 $z_0\to0$,$\{g_n\}$的子序列(仍用$\{g_n\}$表示)和正数列 $\rho_n\to0$,使得在$\mathbb{C}$ 上 $G_n(\zeta)=\rho_n^{-1}g_n(z_n+\rho_n\zeta)\overset{\chi}{\Rightarrow}G(\zeta)$,其中 $G(\zeta)$是$\mathbb{C}$ 上有穷级的非常数亚纯函数,零点重级至少为 3。记:

$$I_1:=\frac{S_n(z_n+\rho_n\zeta)}{R_n(z_n+\rho_n\zeta)f_n^2(z_n+\rho_n\zeta)}$$

$$I_2:=\frac{R_n'(z_n+\rho_n\zeta)}{R_n^2(z_n+\rho_n\zeta)f_n(z_n+\rho_n\zeta)}$$

注意到 $I_1=\rho_n^2R_n(z_n+\rho_n\zeta)S_n(z_n+\rho_n\zeta)\cdot G_n^2(\zeta)$和 $I_2=\rho_n\cdot\frac{R_n'(z_n+\rho_n\zeta)}{R_n(z_n+\rho_n\zeta)}\cdot G_n(\zeta)$。

可见,在$\mathbb{C}\setminus G^{-1}(\infty)$内 $I_1\Rightarrow0$ 和 $I_2\Rightarrow0$。简单的计算可得:

$$G_n'(\zeta)+1+I_1+I_2=-\left(\frac{f_n'(w)}{R_n(w)f_n^2(w)}-\frac{S_n(w)}{R_n(w)f_n^2(w)}-1\right)\Bigg|_{w=z_n+\rho_n\zeta}\neq0$$

在$\mathbb{C}\setminus G^{-1}(\infty)$内,$G_n'(\zeta)+1+I_1+I_2\Rightarrow G'(\zeta)+1$。根据 Hurwitz 定理,在$\mathbb{C}$ 上 $G'(\zeta)\equiv-1$ 或 $G'(\zeta)\neq-1$,这与引理 6 矛盾。

3　定理 1 的证明

(反证法)假设$f'(z)-R(z)f^2(z)-S(z)$在复平面上只有有限多个零点。为方便起见,记 $d_1:=\deg(R)$,$d_2:=\deg(S)$,$\alpha:=\frac{d_1+d_2}{2}$,$\beta:=\frac{d_2-d_1}{2}$。

令 $R(z)\sim c_1z^{d_1}$,$S(z)\sim c_2z^{d_2}(z\to\infty)$,其中 $c_1\neq0$ 和 c_2 为常数。

情形 1　$\alpha>0$。

令 ε 表示满足 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\rho-2-2\alpha}{2}\right)$的常数。根据引理 4,存在 $a_n\to\infty$,$\delta_n\to0$,使得

$$S(\Delta(a_n,\delta_n),f)\geqslant|a_n|^{\rho-2-2\alpha-\varepsilon}\text{和}\ \delta_n\leqslant|a_n|^{-\alpha}\tag{2}$$

记

$$f_n(z):=\frac{f(a_n+a_n^{-\alpha}z)}{a_n^{\beta}},R_n(z):=\frac{R(a_n+a_n^{-\alpha}z)}{a_n^{d_1}},$$

$$S_n(z):=\frac{S(a_n+a_n^{-\alpha}z)}{a_n^{d_2}}$$

其中 $z\in\Delta(0,3)$。在 $\Delta(0,3)$内 $R_n(z)\Rightarrow c_1$,$S_n(z)\Rightarrow c_2$。

当 n 足够大时,有

$$f_n'-R_nf_n^2-S_n=\frac{f'(a_n+a_n^{-\alpha}z)-R(a_n+a_n^{-\alpha}z)f^2(a_n+a_n^{-\alpha}z)-S(a_n+a_n^{-\alpha}z)}{a_n^{d_2}}\neq0$$

由引理 7 知,$\{f_n\}$在 $\Delta(0,3)$内正规。根据 Marty 定则,存在 $M>0$,使得在 $\bar{\Delta}(0,2)$内对于所有的 n 满足 $f_n^{\#}(z)<M$,因此对所有 n,有 $S(2,f_n)<4M^2$。根据引理 3,当 n 足够大时,有

$S(1,f_n a_n^{\beta}) \leqslant S(2,f_n)+S(2,a_n^{\beta})+(\lg 2)^{-1}\lg(|a_n^{\beta}|+|a_n^{\beta}|^{-1}) \leqslant 4M^2+0+(\lg 2)^{-1}\lg(2|a_n|^{|\beta|}) \leqslant 4M^2+1+(\lg 2)^{-1}|\beta|\lg|a_n|$

于是,$S(\Delta(a_n,|a_n|^{-\alpha}),f)=S(1,f_n a_n^{\beta}) \leqslant 4M^2+1+(\lg 2)^{-1}|\beta|\lg|a_n|$,这与式(2)矛盾。

情形2 $\alpha \leqslant 0$。

当$|z|$足够大时,有:

$$\frac{f'(z)}{R(z)f^2(z)}-\frac{S(z)}{R(z)f^2(z)}-1 \neq 0。\tag{3}$$

对于足够大的$|z_0|$:

(i)如果$f(z_0)\neq 0,\infty$,则式(3)成立;

(ii)如果$f(z_0)=0$,则$f'(z_0)\neq S(z_0)$,因此z_0是$\frac{f'(z)}{R(z)f^2(z)}-\frac{S(z)}{R(z)f^2(z)}-1$的一个极点;

(iii)如果$f_n(z_0)=\infty$,则z_0是$\frac{f_n'(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}-\frac{S_n(z)}{R_n(z)f_n^2(z)}$的零点。

记$g(z):=\frac{1}{R(z)f(z)}$。$\rho(g)>2$,令ε表示满足$\varepsilon \in \left(0,\frac{\rho-2}{3}\right)$的常数。根据引理4,存在$a_n\to\infty,\delta_n\to 0$,使得

$$S(\Delta(a_n,\delta_n),g) \geqslant |a_n|^{\rho-2-\varepsilon}$$
$$g^{\#}(a_n) \geqslant |a_n|^{\frac{\rho-2-\varepsilon}{2}} \tag{4}$$

记$g_n(z):=g(a_n+z),z\in\Delta$。当$n$足够大时,$g(z)$的零点重级至少为3。

因此断言$\{g_n\}$在0处是正规的。假设$\{g_n\}$在0处不正规。应用引理2,存在点列$z_n\to 0$,$\{g_n\}$的子序列(仍用$\{g_n\}$表示)和正数$\rho_n \leqslant \frac{M}{\sqrt{g_n^{\#}(0)}}$,其中$M$是一个与$n$无关的常数,使得在$\mathbb{C}$上$G_n(\zeta)=\rho_n^{-1}g_n(z_n+\rho_n\zeta)\overset{\chi}{\Rightarrow}G(\zeta)$,其中$G(\zeta)$是$\mathbb{C}$内有穷级的非常数亚纯函数,零点重级至少为3。

对于足够大的$|z|$,有

$$\rho_n \leqslant \frac{M}{\sqrt{g_n^{\#}(0)}}=\frac{M}{\sqrt{g^{\#}(a_n)}} \leqslant M|a_n|^{-\frac{\rho-2-\varepsilon}{4}} \leqslant |a_n|^{-\frac{\rho-2-2\varepsilon}{4}}$$

记:

$$I_1:=\frac{S(a_n+z_n+\rho_n\zeta)}{R(a_n+z_n+\rho_n\zeta)f^2(a_n+z_n+\rho_n\zeta)}$$
$$I_2:=\frac{R'(a_n+z_n+\rho_n\zeta)}{R^2(a_n+z_n+\rho_n\zeta)f(a_n+z_n+\rho_n\zeta)}$$

注意到:

$$I_1=\rho_n^2 R(a_n+z_n+\rho_n\zeta)S(a_n+z_n+\rho_n\zeta)\cdot G_n^2(\zeta)$$
$$I_2=\rho_n\cdot\frac{R'(a_n+z_n+\rho_n\zeta)}{R(a_n+z_n+\rho_n\zeta)}\cdot G_n(\zeta)$$

于是,在$\mathbb{C}\setminus G^{-1}(\infty)$内,$I_1\Rightarrow 0$和$I_2\Rightarrow 0$。简单的计算可得

$$G_n'(\zeta)+1+I_1-I_2=-\left(\frac{f'(w)}{R(w)f^2(w)}-\frac{S(w)}{R(w)f^2(w)}-1\right)\Bigg|_{w=a_n+z_n+\rho_n\zeta} \neq 0$$

在$\mathbb{C}\setminus G^{-1}(\infty)$内$G_n'(\zeta)+1+I_1-I_2\Rightarrow G'(\zeta)-1$。根据Hurwitz定理,在$\mathbb{C}$上有$G'(\zeta)\equiv -1$或$G'(\zeta)\neq -1$,这与引理6相矛盾。

由于$\{g_n\}$在0处正规,因此根据Marty定则,存在$M>0,\delta>0$使得$\bar{\Delta}(0,\delta)$对于所有n都有$g_n^{\#}(z)<M$,进而有:

$$S(\bar{\Delta}(a_n,\delta),g)=S(\bar{\Delta}(0,\delta),g_n) =\frac{1}{\pi}\iint_{\bar{\Delta}(0,\delta)}[g_n^{\#}(z)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant (M\delta)^2$$

这与式(4)相矛盾。

4 结束语

运用Nevanlinna的亚纯函数值分布理论和正规族理论方法,研究了超越亚纯函数的值分布理论,进一步推广Hayman的著名结果,丰富了亚纯函数值分布理论。然而遗憾的是,不知道定理1中对函数f的级的限制是否是必要的,该问题有待进一步深入研究。

参考文献:

[1] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives[J]. Annals of Mathematics,1959,70(1):9-42.

[2] Mues E. Uber ein Problem von Hayman[J]. Math. Z,1979,164(3):239-259.

[3] Pang X, Zalcman L. Normal families and shared values[J]. Bulletin of the London Mathematical Society,2000,32(3):325-331.

[4] Nevo S. On theorems of Yang and Schwick[J]. Complex Variables and Elliptic Equations,2001,46(4):315-321.

[5] Zalcman L. Normal families: new perspectives[J]. Bulletin of the American Mathematical Society,1998,35(3):215-230.

[6] Nevo S. Application of Zalcman's lemma to Qm-

normal families[J]. Analysis-International Mathematical Journal of Analysis and its Application, 2001,21(3):289-325.

[7] Liu X, Nevo S, Pang X. On the k th derivative of meromorphic functions with zeros of multiplicity at least k+1[J]. Journal of mathematical analysis and applications,2008,348(1):516-529.

[8] Yang P, Niu P Y, Pang X C. A Picard type theorem concerning meromorphic functions of hyper-order [J]. Scientia Sinica Mathematica, 2016, 47(3):357-370.

[9] Yang P, Yang J H, Pang X C. A Note on the Value Distribution of $f'(z)-af^k(z)-b$[J]. Methods and Function Theory,2020, Publish Online.

[10] Wang Y F, Fang M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with multiple zeros[J]. Acta Math Sin,1998,14:17-26.

The Study of $f'(z)-af^2(z)$ Value Distribution Theory

YANG Pai[1], DENG Song[1], YANG Jinhua[2]

(1. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China;2. College of Mathematic Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China)

Abstract: In this paper, Nevanlinna's meromorphic function value distribution theory and normal family theory are used to study the theory of value distribution of meromorphic functions, which further extend the famous result due to Hayman, and enrich the value distribution theory of meromorphic functions.

Keywords: meromorphic functions; normal family; the value distribution