

文章编号: 2096-1618(2023)02-0240-04

(4+1)维 Fokas 方程的有界行波解

蔡妮平

(成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225)

摘要:利用动力系统分岔的方法研究(4+1)维 Fokas 方程的有界行波解, 获得不同参数情况下这个高维方程的行波系统的不同拓扑结构相图. 这些相图清楚地展示了行波系统所有可能的有界轨道. 通过复杂的椭圆积分, 根据这些不同类型的轨道给出有界行波解, 包括钟型孤立波解和周期波解.

关键词:(4+1)维 Fokas 方程; 动力系统; 周期波解; 孤波解

中图分类号:O192

文献标志码:A

doi:10.16836/j.cnki.jcui.2023.02.017

0 引言

2006 年, Fokas 将可积的 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程和 Davey-Stewartson (DS) 方程的 Lax 对推广到高维线性波动方程, 得到了(4+1)维非线性 Fokas 方程^[1]:

$$4u_{tx} - u_{xxxy} + u_{xyyy} + 12u_x u_y + 12uu_{xy} - 6u_{zw} = 0 \quad (1)$$

KP 方程描述了不同深度和宽度的海峡或通道中的面波和内波的演化, DS 方程描述了有限深度水域上三维波的演化. 因此, 方程(1)的物理性质来源于 KP 和 DS 方程的物理性质. 高维非线性 Fokas 方程是非常重要的一类方程, 该方程的重要性在于它是数学物理学中的高维可积模型的现实问题, 体现了四维空间中也存在可积的非线性偏微分方程.

正是因为方程(1)的重要性, 学者们采取了许多方法研究该方程的精确解, 特别是对该方程行波解的研究. 2010 年, Lee 等^[2]利用改进的 tanh-coth 方法, 扩展的 Jacobi 椭圆函数法和 Exp-函数法得到了方程(1)的许多行波解. Kim 等^[3]利用 (G/G)-展开方法获得方程(1)的行波解. He^[4]通过使用 F-展开方法来研究方程(1)以找到一些新的行波解. Zhang 等^[5]利用 Hirota 的双线性方法得到了方程(1)的行波解, 其中包括单孤子解, 双孤子解和三孤子解. M. O. Al-Amr 等^[6]利用改进的简单方程法 (MSEM) 和扩展的最简单方程法 (ESEM) 获得了方程(1)的行波解. C. A. Gomez 等^[7]通过改进的 tanh-coth 方法导出了方程(1)推广的行波解.

虽然已有学者用各种方法获得了方程(1)的行波

解并得到结论, 这对于理解方程波的传播以及物理意义有非常重要的作用, 但是方程的解有可能会遗失. 虽然上述的方法能够有效地获得各种类型的行波解, 但是这些方法不能清楚地解释: 当参数变化时, 方程的解是如何演化的. 动力系统的分岔方法就可以高效地解决这个问题. 实际上, 该方法已经被广泛地应用于各种系统^[8-15], 包括奇行波系统和非奇行波系统. 从物理数学的角度来研究方程(1)的有界行波解.

1 (4+1) 维 Fokas 方程行波系统的分岔和相图

对方程(1)做行波变换 $u(x, y, z, w) = u(\xi)$, $\xi = x + ay + bz + dw - ct$, 其中 $c \neq 0$ 表示波速, 得到

$$(a^3 - a)u'''' + (-6bc - 4d)u'' + 12a(u')^2 + 12auu'' = 0 \quad (2)$$

其中'表示 d/dξ. 对式(2)进行两次积分, 并省略积分常数, 得

$$(a^3 - a)u'' + 6au^2 + (-6bd - 4c)u = 0 \quad (3)$$

假设 $a^3 - a \neq 0$ 且 $a > 1$, 因为 $a < -1$ 或 $-1 < a < 0$ 或 $0 < a < 1$ 有相似的讨论结果. 式(3)可以写成如下的等价形式:

$$\begin{cases} u' = y \\ y' = \frac{-6}{a^2 - 1}u^2 + \frac{6bd + 4c}{a^3 - a}u \end{cases} \quad (4)$$

该系统有如下的能量函数:

$$H(u, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{a^2 - 1}u^3 - \frac{3bd + 2c}{a^3 - a}u^2 \quad (5)$$

定理 当 $c \neq \frac{-3bd}{2}$, 系统(4)有两个平衡点 $A(0, 0)$ 和

$B(\frac{3bd + 2c}{3a}, 0)$. 当 $c > \frac{-3bd}{2}$ 时, A 为鞍点, B 为中心; 当 $c <$

$-\frac{3bd}{2}$ 时, A 为中心, B 为鞍点. 当 $c = -\frac{3bd}{2}$ 时, 系统(4)只有一个平衡点 $C(0,0)$.

证明 由直接的计算可知, 当 $c \neq -\frac{3bd}{2}$ 时, 系统(4)有两个平衡点 $A(0,0)$ 和 $B(\frac{3bd+2c}{3a}, 0)$. 记 $M(u, y)$ 为系统(5)的线性化系统的系数矩阵:

$$M(u, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{a^2-1}u + \frac{6bd+4c}{a^3-a} & 0 \end{bmatrix}$$

记 $J(u, y) = \det(M(u, y))$. 计算得到平衡点 A, B 相应的行列式 $J(A) = -\frac{6bd+4c}{a^3-a}$, $J(B) = \frac{6bd+4c}{a^3-a}$. 当 $c > -\frac{3bd}{2}$ 时, $J(A) > 0, J(B) < 0$. 由动力系统和哈密顿系统的相关理论^[17], 可知 A 为鞍点, B 为中心. 同理可证当 $c < -\frac{3bd}{2}$ 时, A 为中心, B 为鞍点.

若 $c = -\frac{3bd}{2}$, 直接计算可知系统(4)有唯一的平衡点 $C(0,0)$. 且 $J(C) = 0$. 这意味着 C 是高阶平衡点. 根据文献[17]知 C 为尖点.

显然, $c > -\frac{3bd}{2}$ 与 $c < -\frac{3bd}{2}$ 系统(4)有相同的拓扑结构. 为了简便, 讨论 $c > -\frac{3bd}{2}$ 和 $c = -\frac{3bd}{2}$ 情况下, 系统的拓扑结构即可. 记 $h = H(u, y)$, 可计算出平衡点的能量值:

$$h_A = 0, \\ h_B = -\frac{(3bd+2c)^3}{27(a^5-a^3)}$$

显然当 $c > -\frac{3bd}{2}$ 时, 鞍点的能量大于中心的能量, 即 $h_A > h_B$. 基于以上分析, 有如下分析结果:

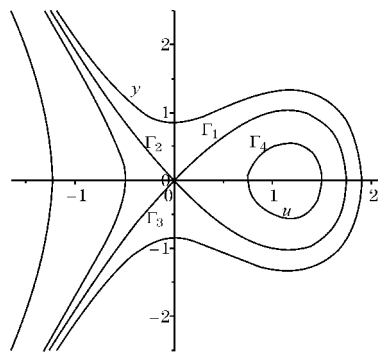
情形 1 当 $c > -\frac{3bd}{2}$ 时, 存在一条连接鞍点的同宿轨 $\Gamma_1(h)$ 包围着中心 B , 并且中心 B 周围是一簇周期轨 $\Gamma_4(h)$:

$$\Gamma_1(h) = \{H(u, y) = h, h = 0\}$$

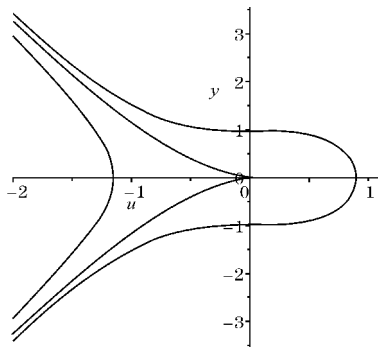
$$\Gamma_4(h) = \left\{ H(u, y) = h, h \in \left(-\frac{(3bd+2c)^3}{27(a^5-a^3)}, 0 \right) \right\}.$$

当 $h \rightarrow -\frac{(3bd+2c)^3}{27(a^5-a^3)}$ 时, $\Gamma_4(h)$ 趋于中心 B , 当 $h \rightarrow 0$ 时, $\Gamma_4(h)$ 趋于同宿轨 Γ_1 (图 1a). 除了同宿轨 Γ_1 和周期轨 Γ_4 外, 图 1(a) 的其他轨道都是无界轨道, 包括 Γ_2 和 Γ_3 .

情形 2 当 $c = -\frac{3bd}{2}$ 时, 方程(1)全是无界轨道 (图 1b).



(a) $b=d=1, c=2$



(b) $b=1, d=2, c=-3$

图 1 系统(4)的相图

2 (4+1) 维 Fokas 方程的有界行波解

根据上面的分析, 有界轨道只存在于情形 1 中, 即 $c > -\frac{3bd}{2}$ 时的同宿轨 Γ_1 以及周期轨 Γ_4 .

首先, 考虑第一种有界轨道同宿轨 Γ_1 , 其能量等于 0. 该轨道可以被表示成:

$$y = \pm \sqrt{-\frac{4}{a^2-1}u^2(u-u_1)},$$

这里 $u_1 = \frac{3bd+2c}{2a}$, 并且 $0 < u < u_1$. 取初始值 $u(0) = u_1$. 根据系统(4)的第一个方程可知, 同宿轨 Γ_1 可表示成:

$$\int_u^{u_1} \frac{du}{\sqrt{-u^2(u-u_1)}} = \int_\xi^0 \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} d\xi, \xi < 0,$$

和

$$-\int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{-u^2(u-u_1)}} = \int_0^\xi \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} d\xi, \xi > 0.$$

这两个表达式可以写为

$$\int_{u_1}^u \frac{du}{\sqrt{-u^2(u-u_1)}} = \frac{-2}{\sqrt{a^2-1}} |\xi| \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

注意到

$$\int_{u_1}^u \frac{du}{u\sqrt{u_1-u}} = \frac{1}{\sqrt{u_1}} \ln \frac{\sqrt{u_1}-\sqrt{u_1-u}}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_1-u}}$$

通过计算得到同宿解的表达式 (图 2a):

$$u_h = u_1 - \frac{u_1(1 - e^{\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}}|\xi|})^2}{(1 + e^{\frac{-2}{\sqrt{a^2-1}}|\xi|})^2} \quad -\infty < \xi < +\infty.$$

其次,考虑第二种有界轨道周期轨 Γ_4 , 其能量高于中心 B 的能量,但是低于鞍点 A 的能量. 其中任意周期轨道:

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \sqrt{(u_4-u)(u-u_3)(u-u_2)}.$$

这里 u_2, u_3, u_4 是实数, 并且满足 $u_2 < u_3 < u < u_4$. 设周期为 $2T$. 取初始值 $u(0) = u_3$. 则同宿轨 Γ_4 表示为如下积分形式:

$$\int_{u_3}^u \frac{du}{\sqrt{(u_4-u)(u-u_3)(u-u_2)}} = \int_0^\xi \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} d\xi, \quad 0 < \xi < T,$$

和

$$\int_u^{u_3} \frac{du}{-\sqrt{(u_4-u)(u-u_3)(u-u_2)}} = \int_\xi^0 \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} d\xi, \quad -T < \xi < 0.$$

即

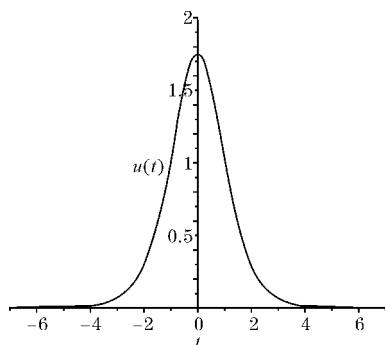
$$\int_u^{u_3} \frac{du}{\sqrt{(u_4-u)(u-u_3)(u-u_2)}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} |\xi|, \quad -T < \xi < T.$$

利用公式

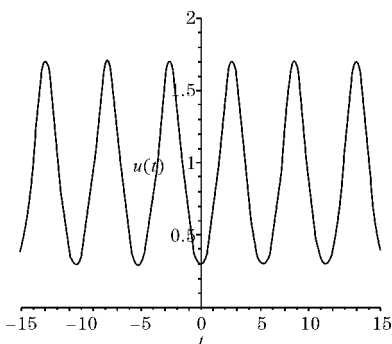
$$\int_u^{u_3} \frac{du}{\sqrt{(u_4-u)(u-u_3)(u-u_2)}} = g \cdot \operatorname{sn}^{-1} \left(\sqrt{\frac{(u_4-u_2)(u-u_4)}{(u_4-u_3)(u-u_2)}}, k \right)$$

这里 $g = \frac{2}{\sqrt{u_4-u_2}}, k^2 = \frac{u_4-u_3}{u_4-u_2}$, 得到系统 (4) 的周期解 (图 2b):

$$u_p = u_2 + \frac{(u_3-u_2)(u_4-u_2)}{(u_4-u_2) - (u_4-u_3) \operatorname{sn}^2 \left(\sqrt{\frac{u_4-u_2}{a^2-1}} |\xi| \right)} \quad -T < \xi < T.$$



(a) 钟型孤立波



(b) 周期波

图2 同宿轨和周期轨的数值模拟

3 结束语

应用动力系统分岔法研究了 $(4+1)$ 维 Fokas 方程的有界行波, 通过详细地分析相空间几何, 可以无遗漏地研究它的所有有界轨道. 最后给出有界解的显示表达式, 其中包括同宿轨对应的钟型孤立波和周期轨对应的周期波. 这有助于理解非线性波在高维空间中的运动.

参考文献:

- [1] Hirota, Ryogo. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1973, 14(7): 805-809.
- [2] Lee J, Sakthivel R, Wazzan L. Exact traveling wave solutions of a higher-dimensional nonlinear evolution equation[J]. Modern Physics Letters B, 2010, 24(10): 1011-1021.
- [3] Kim H, Sakthivel R. New exact traveling wave solutions of some nonlinear higher-dimensional physical models[J]. Reports on Mathematical Physics, 2012, 70(1): 39-50.
- [4] He Y H. Exact solutions for $(4+1)$ -dimensional nonlinear Fokas equation using extended F-expansion method and its variant [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014(8): 1-11.
- [5] Zhang S, Tian C, Qian W Y. Bilinearization and new multisoliton solutions for the $(4+1)$ -dimensional Fokas equation [J]. Pramana Journal of Physics, 2016, 86(6): 1259-1267.
- [6] Al-Amr M O, El-Ganaini S. New exact traveling wave solutions of the $(4+1)$ -dimensional Fokas equation[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2017, 74(6): 1274-1287.
- [7] Gomez C A, Garzon G H, Hernandez R J C. On exact solutions for $(4+1)$ -dimensional Fokas equation with variable coefficients[J]. Advanced Studies in Theoretical Physics, 2017, 11(12): 765-771.
- [8] Wei L, Zhou Y, Liu Q. Traveling wave solutions of two types of generalized breaking soliton equations [J]. Journal of Applied Analysis & Computation, 2020, 11(4).

- [9] Zhou Y, Qian L. Bifurcation of travelling wave solutions for a $(2+1)$ -dimensional nonlinear dispersive long wave equation[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2007, 189(1): 970–979.
- [10] Wang L, Zhou Y, Liu Q. Traveling waves of the $(3+1)$ -dimensional kadomtsev-petviashvili-boussinesq equation[J]. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 2020, 10(1): 267–281.
- [11] Li J, Zhu W, Chen G. Understanding Peakons, Periodic Peakons and Compactons via a Shallow Water Wave Equation[J]. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2016, 26(12): 1650207.
- [12] Zhou Y, Fan F, Liu Q. Bounded and unbounded traveling wave solutions of the $(3+1)$ -dimensional Jimbo-Miwa equation[J]. *Results in Physics*, 2019, 12: 1149–1157.
- [13] Li J, Chen G. Bifurcations of traveling wave solutions in a microstructured solid model[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(1): 1–18.
- [14] Li J, Chen G, Song J. Bifurcations and Dynamics of Traveling Wave Solutions for the Regularized Saint-Venant Equation[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2020, 30(7): 2050109.
- [15] Qiao Z, Li J. Negative-order KdV equation with both solitons and kink wave solutions[J]. *Europhysics Letters*, 2011, 94(5): 50003.
- [16] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 101–123.

Bounded Traveling Wave Solutions of $(4+1)$ Dimensional Fokas Equation

CAI Niping

(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: In this paper, the bifurcation method of dynamical system is used to study the bounded traveling wave solutions of $(4+1)$ dimensional Fokas equation. We obtain the different topological structure of the traveling wave solution of this higher dimensional equation with different parameters. These phase diagrams clearly show all bounded orbits of it. Calculating by complex elliptic integrals, bounded solutions of traveling waves are given according to these different types of orbits, including bell solitary wave solutions and periodic wave solutions.

Keywords: $(4+1)$ dimensional Fokas equation; dynamical system; bell solitary wave solutions; periodic wave solutions