文章编号: 2096-1618(2023)02-0244-07

分裂平衡问题的扰动 Levitin-Polyak 适定性

王 瑞, 胡 容
(成都信息工程大学应用数学学院,四川 成都 610225)

摘要:将 Lucchetti 与 Patrone 意义下的适定性概念拓展到分裂平衡问题,讨论 Banach 空间中分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下带扰动的 Levitin-Polyak 适定性. 首先,借助近似解集分别给出分裂平衡问题扰动 Levitin-Polyak 适定性和广义扰动 Levitin-Polyak 适定性的距离刻画;然后证明当分裂平衡问题具有非空有界解集时,分裂平衡问题是广义扰动适定的.

关 键 词:分裂平衡问题;扰动 Levitin-Polyak 适定性;近似解集;距离刻画;解集非空有界

中图分类号:O176 **文献标志码**:A

doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2023.02.018

0 引言

1966 年 Tykhonov[1] 首次提出了无约束优化问题的适定性定义,称为 Tykhonov 适定性. 随后,Tykhonov 适定性被推广到约束优化问题上. 针对约束优化问题的 Tykhonov 适定性要求近似序列必须位于可行域内,然而这一点并不是总能满足. 因此为了放宽这一限制,Levitin 等[2] 提出了 Levitin-Polyak(简记为 LP)适定性,它要求优化问题所产生的近似序列不一定位于可行域内,但却无限接近于可行域. 然而 Tykhonov 适定性和 LP 适定性都要求优化问题具有唯一解,现实中许多优化问题的解却并不唯一,因此在 1970 年 Furi 等[3] 引入了优化问题的广义适定性概念. 广义适定性要求优化问题的解集非空且任意近似序列都存在子序列收敛于解集中的某个点. 值得一提的是,关于优化问题适定性的 Furi-Vignoli 型距离刻画正是 Furi 等[3-4] 首次提出. 后来,Zolezzi[5-6] 进一步推广了适定性的概念,通过将原始优化问题嵌入到一族带扰动的优化问题中,研究了一族带扰动的优化问题的适定性,称之为优化问题的扰动适定性. 关于优化问题适定性的更多研究结果可参见文献[7-15]. 此外,学者们也将优化问题的各类适定性逐步推广到其他变分问题,如变分不等式问题、纳什均衡问题、不动点问题、包含问题、平衡问题等[16-31].

分裂变分不等式和分裂优化问题是 Censor 等[32] 提出的两类新的变分问题,分别包含经典的变分不等式和优化问题作为特例. 考虑到平衡问题是变分不等式、优化问题的更广泛形式,我们也研究分裂平衡问题. 分裂平衡问题即寻找一个平衡问题的解,使得它在给定的有界线性映射下的像是另一个平衡问题的解. 针对这些新的变分问题,学者们也研究了它们的适定性. Hu 等[33-34] 讨论了分裂变分不等式问题的扰动 LP 适定性和分裂优化问题的扰动 LP 适定性. 高友[35] 结合文献[17]的变分不等式问题在 Lignola 与 Morgan 意义下的适定性以及文献[19]的变分不等式问题的 α 适定性,研究了分裂平衡问题的 LP-α 适定性. 王瑞等[36] 将文献[16-17]中首次提出的变分不等式问题的适定性概念(即在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的适定性)推广到分裂平衡问题,研究了分裂平衡问题的 LP 适定性. 然而目前还缺少对分裂平衡问题的扰动 LP 适定性的研究,因此本文研究分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下的扰动 LP 适定性.

1 预备知识

除特别说明外,本文总假设 X、Y 为两个实 Banach 空间,$C\subset X$ 和 $Q\subset Y$ 均为非空闭凸集. 给定两个二元映射 $f:X\times X\to R$ 和 $g:Y\times Y\to R$,以及给定一个有界线性映射 $A:X\to Y$. 又设 L 是参数赋范空间,$P\subset L$ 是一个半径为正数的闭球,且给定一点 $p^*\in P$. 再给定两个三元映射 $\tilde{f}:L\times X\times X\to R$ 和 $\tilde{g}:L\times Y\times Y\to R$,且满足 $\tilde{f}(p^*,\cdot,\cdot)=f$ 以及 $\tilde{g}(p^*,\cdot,\cdot)=g$. 文中用→表示强收敛.

考虑如下带扰动的分裂平衡问题(简记为 SEP_p),即寻求 $(x^*,y^*)\in C\times Q$ 使得

$$\tilde{f}(p,x^*,x)\geqslant 0,\quad \forall x\in C,$$

且 $y^*=Ax^*\in Q$ 满足

$$\tilde{g}(p,y^*,y)\geqslant 0,\quad \forall y\in Q.$$

收稿日期:2022-02-11

显然，当取 $p=p^*$ 时，上述问题就是分裂平衡问题（简记为 SEP），即寻求 $(x^*,y^*)\in C\times Q$ 使得

$$f(x^*,x)\geqslant 0,\quad \forall x\in C,$$

且 $y^*=Ax^*\in Q$ 满足

$$g(y^*,y)\geqslant 0,\quad \forall y\in Q.$$

下面给出本文涉及的一些相关定义和引理.

定义 1.1 称映射 $f:X\times X\to R$ 为半连续的，如果对 $\forall x,y\in X$

$$\limsup_{t\to 0^+} f(x+t(y-x),y)\leqslant f(x,y).$$

定义 1.2 称映射 $f:X\times X\to R$ 为单调的，如果对 $\forall x,y\in X$

$$f(x,y)+f(y,x)\leqslant 0.$$

定义 1.3[37] 若对任意强收敛到 x 的序列 $\{x_n\}\subset X$，有

$$f(x)\leqslant \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

则称 f 在 $x\in X$ 处是下半连续的.

定义 1.4[37] 若对任意强收敛到 x 的序列 $\{x_n\}\subset X$，有

$$f(x)\geqslant \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$$

则称 f 在 $x\in X$ 处是上半连续的.

定义 1.5[38] 设 A 是 X 中的非空子集. 集合 A 的非紧测度 μ 定义如下：

$$\mu(A)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\mathrm{diam}A_i<\varepsilon,i=1,2,\cdots,n\},$$

其中，diam 表示集合的直径.

定义 1.6[38-39] 设 A、B 是 X 中的非空子集. A 和 B 之间的 Hausdorff 距离 $H(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$H(A,B)=\max\{e(A,B),e(B,A)\},$$

其中 $e(A,B)=\sup\limits_{a\in A} d(a,B)$，$d(a,B)=\inf\limits_{b\in B}\|a-b\|$. 设 $\{A_n\}$ 是 X 中的非空子集序列，称 $\{A_n\}$ 按 Hausdorff 距离收敛于 A 当且仅当 $H(A_n,A)\to 0$. 此外，容易验证，$e(A_n,A)\to 0$ 当且仅当对所有的 $a_n\in A_n$ 有 $d(a_n,A)\to 0$.

引理 1.1[35] 设 $f:X\times X\to R$，$g:Y\times Y\to R$ 都是单调半连续映射，对 $\forall x\in C,y\in Q$，$f(x,x)\geqslant 0$，$g(y,y)\geqslant 0$，$f(x,\cdot)$，$g(y,\cdot)$ 是凸的，则对 $\forall x^*\in C$，下面的结论等价：

(i) $f(x^*,x)\geqslant 0$，$\forall x\in C$ 且 $y^*=Ax^*\in Q$ 满足 $g(y^*,y)\geqslant 0$，$\forall y\in Q$；

(ii) $f(x,x^*)\leqslant 0$，$\forall x\in C$ 且 $y^*=Ax^*\in Q$ 满足 $g(y,y^*)\leqslant 0$，$\forall y\in Q$.

2　分裂平衡问题的扰动 Levitin-Polyak 适定性

首先给出分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下带扰动的适定性的定义.

定义 2.1 设 $\{p_n\}\subset P$ 且 $p_n\to p^*$，称 $\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y$ 为 SEP（在 Lucchetti 与 Patrone 意义下）相应于 $\{p_n\}$ 的扰动近似序列，如果存在 $0<\varepsilon_n\to 0$ 使得 $x_n\in C$，$\tilde{f}(p_n,x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant 0$，$\forall x\in C,n\in N$，$y_n\in Q$，$\|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n$，$\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant 0$，$\forall y\in Q,n\in N$.

定义 2.2 设 $\{p_n\}\subset P$ 且 $p_n\to p^*$，称 $\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y$ 为 SEP（在 Lucchetti 与 Patrone 意义下）相应于 $\{p_n\}$ 的扰动 Levitin-Polyak（简记为 LP）近似序列，如果存在 $0<\varepsilon_n\to 0$ 使得

$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n$，$\tilde{f}(p_n,x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant 0$，$\forall x\in C,n\in N$，

$d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n$，$\|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n$，$\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant 0$，$\forall y\in Q,n\in N$.

将定义 2.1 和定义 2.2 中 $\varepsilon_n\|x_n-x\|$ 和 $\varepsilon_n\|y_n-y\|$ 都替换成 ε_n，则两定义就分别变成在 Lignola 与 Morgan 意义下的扰动近似序列和扰动 LP 近似序列.

定义 2.3 设 $\{p_n\}\subset P$ 且 $p_n\to p^*$，称 SEP 是扰动适定的（resp.，扰动 LP 适定的），如果 SEP 具有唯一解且每一个相应于 $\{p_n\}$ 的扰动近似序列（resp.，扰动 LP 近似序列）都强收敛于该唯一解.

定义 2.4 设 $\{p_n\}\subset P$ 且 $p_n\to p^*$，称 SEP 是广义扰动适定的（resp.，广义扰动 LP 适定的），如果 SEP 的解集非空且每一个相应于 $\{p_n\}$ 的扰动近似序列（resp.，扰动 LP 近似序列）都存在子序列强收敛于解集中的某一点.

当取 $p_n=p^*$ 时，定义 2.3 和定义 2.4 就分别退化为文献[36]中的定义2.3和定义2.4.

对 $\forall\sigma,\varepsilon\geqslant 0$，考虑 SEP 的近似解集定义如下：

$$\Omega(\sigma,\varepsilon)=\bigcup_{p\in B(p^*,\sigma)}\{(x,y)\in X\times Y\,|\,d(x,C)\leqslant\varepsilon,\tilde{f}(p,x,x')+\varepsilon\|x-x'\|\geqslant 0,\forall x'\in C,d(y,Q)\leqslant\varepsilon,\|y-Ax\|\leqslant\varepsilon,\tilde{g}(p,y,y')+\varepsilon\|y-y'\|\geqslant 0,\forall y'\in Q\},$$

其中 $B(p^*,\sigma)$ 是以 p^* 为圆心，σ 为半径的闭球.

接下来，借助近似解集分别研究分裂平衡问题的扰动 LP 适定性和广义扰动 LP 适定性的距离刻画.

定理 2.1 如果满足以下条件：

(i) $\forall x\in C,y\in Q$ 有 $\tilde{f}(\cdot,x,x)\geqslant 0$，$\tilde{g}(\cdot,y,y)\geqslant 0$；

(ii) $\forall p\in P$，$\tilde{f}(p,\cdot,\cdot)$ 和 $\tilde{g}(p,\cdot,\cdot)$ 都是单调半连续的；

(iii) $\forall p\in P,x\in C,y\in Q$，$\tilde{f}(p,x,\cdot)$ 和 $\tilde{g}(p,y,\cdot)$ 都是凸的；

(iv) $\forall x\in C,y\in Q$，$\tilde{f}(\cdot,x,\cdot)$，$\tilde{g}(\cdot,y,\cdot)$ 都是下半

连续的；

则 SEP 是扰动 LP 适定的当且仅当

$$\forall\sigma,\varepsilon>0,\Omega(\sigma,\varepsilon)\neq\varnothing\text{且}\lim_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\operatorname{diam}(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0. \tag{1}$$

证明：必要性. 设 SEP 是扰动 LP 适定的，故 SEP 具有唯一解 (x_0,y_0). 令 S 为 SEP 的解集，则 $\{(x_0,y_0)\}=S\subset\Omega(\sigma,\varepsilon)$，故 $\Omega(\sigma,\varepsilon)\neq\varnothing$. 下证 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\operatorname{diam}(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0$. 使用反证法，如果 $\operatorname{diam}(\Omega(\sigma,\varepsilon))\nrightarrow0$，当 $\sigma\to0^+,\varepsilon\to0^+$，则存在 $r>0,0<\varepsilon_n\to0,0<\sigma_n\to0$ 使得

$$0<r<\operatorname{diam}(\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n)) \tag{2}$$

由式(2)可知存在 $(x_n,y_n),(x_n',y_n')\in\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n)$ 满足

$$\|(x_n,y_n)-(x_n',y_n')\|>r,\ \forall n\in N. \tag{3}$$

由于 $(x_n,y_n),(x_n',y_n')\in\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n)$，则存在 $p_n,p_n'\in B(p^*,\sigma)$ 使得

$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,\tilde f(p_n,x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C,n\in N,$

$d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,\ \|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n,\tilde g(p_n,y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant0,\ \forall y\in Q,n\in N;$

且 $d(x_n',C)\leqslant\varepsilon_n,\ \tilde f(p_n',x_n',x)+\varepsilon_n\|x_n'-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C,n\in N,$

$d(y_n',Q)\leqslant\varepsilon_n,\ \|y_n'-Ax_n'\|\leqslant\varepsilon_n,\tilde g(p_n',y_n',y)+\varepsilon_n\|y_n'-y\|\geqslant0,\ \forall y\in Q,n\in N.$

故 $\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y,\{(x_n',y_n')\}\subset X\times Y$ 分别是 SEP 相应于 $\{p_n\},\{p_n'\}$ 的扰动 LP 近似序列. 又因为 SEP 是扰动 LP 适定的，故 $\{(x_n,y_n)\},\{(x_n',y_n')\}$ 强收敛于 SEP 的唯一解，这与式(3)矛盾. 因此 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\operatorname{diam}(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0$.

充分性. 假设式(1)成立. 根据 $\forall\sigma,\varepsilon>0,S\subset\Omega(\sigma,\varepsilon)$，以及 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\operatorname{diam}(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0$ 可知，若 S 非空则 S 是单点集. 设 $\{p_n\}\to p^*,\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y$ 是 SEP 相应于 $\{p_n\}$ 的扰动 LP 近似序列，则存在 $0<\varepsilon_n\to0$ 使得

$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,\tilde f(p_n,x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C,n\in N,$

$d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,\ \|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n,\tilde g(p_n,y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant0,\ \forall y\in Q,n\in N.$

故取 $\sigma_n=\|p_n-p^*\|>0$，则有 $\{(x_n,y_n)\}\subset\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n),\ \forall n\in N$. 于是根据 $\sigma_n\to0^+,\varepsilon_n\to0^+,\operatorname{diam}(\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n))\to0$ 知

$$0<\operatorname{diam}(\{(x_n,y_n)\})<\operatorname{diam}(\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n))\to0.$$

从而，当 $n\to\infty$ 时，$\operatorname{diam}(\{(x_n,y_n)\})\to0$. 由此可知 $\{(x_n,y_n)\}$ 是 Cauchy 序列，便有 $\{(x_n,y_n)\}$ 强收敛于 $(x_0,y_0)\in X\times Y$.

由于 $x_n\to x_0$ 以及 $\varepsilon_n\to0^+$，根据 $d(\cdot,C)$ 的连续性可知 $d(x_0,C)=0$，故 $x_0\in C$. 根据 $\tilde f(p,\cdot,\cdot)$ 的单调性可知

$\tilde f(p_n,x,x_n)\leqslant-\tilde f(p_n,x_n,x)\leqslant\varepsilon_n\|x_n-x\|,\ \forall x\in C,\forall n\in N.$

再由 $\tilde f(\cdot,x,\cdot)$ 的下半连续性可知：

$$\begin{aligned}\tilde f(p^*,x,x_0)&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\tilde f(p_n,x,x_n)\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}[-\tilde f(p_n,x_n,x)]\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\varepsilon_n\|x_n-x\|\\&=0,\ \forall x\in C.\end{aligned}$$

即 $f(x,x_0)\leqslant0,\ \forall x\in C$.

由于 A 是有界线性映射，则 A 连续. 又因为 $y_n\to y_0,\ \|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n$ 以及 $\varepsilon_n\to0^+$ 可知 $y_0=Ax_0$，再根据 $d(\cdot,Q)$ 的连续性可知 $d(y_0,Q)=0$，故 $y_0\in Q$. 再结合 $\tilde g(p,\cdot,\cdot)$ 的单调性可知

$\tilde g(p_n,y,y_n)\leqslant-\tilde g(p_n,y_n,y)\leqslant\varepsilon_n\|y_n-y\|,\ \forall y\in Q.$

再由 $\tilde g(\cdot,y,\cdot)$ 的下半连续性可知：

$$\begin{aligned}\tilde g(p^*,y,y_0)&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\tilde g(p_n,y,y_n)\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}[-\tilde g(p_n,y_n,y)]\\&\leqslant\liminf_{n\to\infty}\varepsilon_n\|y_n-y\|\\&=0,\ \forall y\in Q.\end{aligned}$$

即 $g(y,y_0)\leqslant0,\ \forall y\in Q$.

由引理 1.1 可知 $(x_0,y_0)\in C\times Q$ 使得

$$f(x_0,x)\geqslant0,\ \forall x\in C,y_0=Ax_0,g(y_0,y)\geqslant0,\ \forall y\in Q.$$

故可知 $(x_0,y_0)\in S$，从而可证 SEP 是扰动 LP 适定的.

定理 2.2 设 P 是有限维的，如果对 $\forall x\in C,y\in Q$，$\tilde f(\cdot,\cdot,x)$ 和 $\tilde g(\cdot,\cdot,y)$ 均是上半连续的，则 SEP 是广义扰动 LP 适定的当且仅当

$$\forall\sigma,\varepsilon>0,\Omega(\sigma,\varepsilon)\neq\varnothing\text{且}\lim_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\mu(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0 \tag{4}$$

证明：必要性. 假设 SEP 是广义扰动 LP 适定的. 根据广义扰动 LP 适定的定义可知 SEP 的解集 S 非空，又因为 $\forall\sigma,\varepsilon>0,S\subset\Omega(\sigma,\varepsilon)$ 故 $\Omega(\sigma,\varepsilon)\neq\varnothing$. 下面先证 S 为紧集. 任取 $\{(x_n,y_n)\}\subset S$，显然取 $p_n=p^*$，$\{(x_n,y_n)\}$ 是 SEP 相应于 $\{p_n\}$ 的扰动 LP 近似序列. 由于 SEP 是广义扰动 LP 适定的，故存在 $\{(x_n,y_n)\}$ 的子序列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}$ 强收敛于 S 中的点，从而可知 S 是紧集. 由于 S 为紧集，故 $\mu(S)=0$. 从而由文献[20]的关系式(2)可得

$$\begin{aligned}\mu(\Omega(\sigma,\varepsilon))&\leqslant2H(\Omega(\sigma,\varepsilon),S)+\mu(S)\\&=2H(\Omega(\sigma,\varepsilon),S),\end{aligned} \tag{5}$$

又因为 $H(\Omega(\sigma,\varepsilon),S)=\max\{e(\Omega(\sigma,\varepsilon),S),e(S,\Omega(\sigma,\varepsilon))\}=e(\Omega(\sigma,\varepsilon),S)$. (6)

因此为证明 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\mu(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0$，只需证得 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}e(\Omega(\sigma,\varepsilon),S)=0$ 即可. 使用反证法，若 $e(\Omega(\sigma,\varepsilon),S)\not\to0,\sigma\to0^+,\varepsilon\to0^+$，则存在 $r>0,0<\varepsilon_n\to0,0<\sigma_n\to0$ 以及 $(x_n,y_n)\in\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n)$ 使得

$$(x_n,y_n)\notin S+B(0,r),\ \forall n\in N. \tag{7}$$

由于 $\{(x_n,y_n)\}\subset\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n)$，故存在 $p_n\in B(p^*,\sigma_n)$ 使得

$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,\tilde{f}(p_n,x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C,n\in N,$

$d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,\ \|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n,\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant0,\ \forall y\in Q,n\in N.$

因此可知 $\{(x_n,y_n)\}$ 是 SEP 相应于 $\{p_n\}$ 的扰动 LP 近似序列. 又因为 SEP 是广义扰动 LP 适定的，故存在 $\{(x_n,y_n)\}$ 的子序列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}$ 强收敛于 S 中的点，这与式(7)矛盾，故 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}e(\Omega(\sigma,\varepsilon),S)=0$，再结合式(5)和式(6)式可知 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\mu(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0$.

充分性. 假设条件式(4)成立. 下面首先证对 $\forall\sigma,\varepsilon>0,\Omega(\sigma,\varepsilon)$ 为闭集. 事实上任取 $\{(x_n,y_n)\}\subset\Omega(\sigma,\varepsilon)$，设 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$，由 $\{(x_n,y_n)\}\subset\Omega(\sigma,\varepsilon)$ 知存在 $\{p_n\}\subset B(p^*,\sigma_n)$ 使得

$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon,\ \tilde{f}(p_n,x_n,x)+\varepsilon\|x_n-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C,n\in N,$

$d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,\ \|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon,\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\varepsilon\|y_n-y\|\geqslant0,\ \forall y\in Q,n\in N.$

不失一般性，由 P 是有限维必存在 $\bar{p}\in B(p^*,\sigma)$ 使 $p_n\to\bar{p}$. 根据 $d(\cdot,C)$ 及 $d(\cdot,Q)$ 的连续性可知 $d(x_0,C)\leqslant\varepsilon$ 以及 $d(y_0,Q)\leqslant\varepsilon$. 由 $\tilde{f}(\cdot,\cdot,x)$ 和 $\tilde{g}(\cdot,\cdot,y)$ 的上半连续性可知：

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\bar{p},x_0,x)+\varepsilon\|x_0-x\|&\geqslant\limsup_{n\to\infty}\tilde{f}(p_n,x_n,x)+\limsup_{n\to\infty}\varepsilon\|x_n-x\|\\&\geqslant\limsup_{n\to\infty}\{\tilde{f}(p_n,x_n,x)+\varepsilon\|x_n-x\|\}\\&\geqslant0,\ \forall x\in C.\end{aligned}$$

$\|y_0-Ax_0\|\leqslant\varepsilon,$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\bar{p},y_0,y)+\varepsilon\|y_0-y\|&\geqslant\limsup_{n\to\infty}\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\limsup_{n\to\infty}\varepsilon\|y_n-y\|\\&\geqslant\limsup_{n\to\infty}\{\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\varepsilon\|y_n-y\|\}\\&\geqslant0,\ \forall y\in Q.\end{aligned}$$

于是可知 $(x_0,y_0)\in\Omega(\sigma,\varepsilon)$，故 $\forall\sigma,\varepsilon>0,\Omega(\sigma,\varepsilon)$ 为闭集. 当 $\sigma\leqslant\sigma',\varepsilon\leqslant\varepsilon'$ 时有 $\Omega(\sigma,\varepsilon)\subset\Omega(\sigma',\varepsilon')$. 令 $\Omega=\bigcap\limits_{\sigma,\varepsilon>0}\Omega(\sigma,\varepsilon)$，结合 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}\mu(\Omega(\sigma,\varepsilon))=0$ 以及参考文献[38]中的定理，可知 Ω 是非空紧集且 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}H(\Omega(\sigma,\varepsilon),\Omega)=0$. 由于

$\Omega=\{(x_0,y_0)\in C\times Q\mid f(x_0,x)\geqslant0,\forall x\in C,y_0=Ax_0,g(y_0,y)\geqslant0,\forall y\in Q\}=S.$

因此 S 是非空紧集且 $\lim\limits_{\substack{\sigma\to0^+\\ \varepsilon\to0^+}}H(\Omega(\sigma,\varepsilon),S)=0$.

设 $p_n\to p^*$，任取 SEP 相应于 $\{p_n\}$ 的扰动 LP 近似序列 $\{(x_n,y_n)\}$，则存在 $0<\varepsilon_n\to0$，满足

$d(x_n,C)\leqslant\varepsilon_n,\ \tilde{f}(p_n,x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C,n\in N,$

$d(y_n,Q)\leqslant\varepsilon_n,\ \|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n,\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant0,\ \forall y\in Q,n\in N.$

现让 $\sigma_n=\|p_n-p^*\|>0$，则有 $\{(x_n,y_n)\}\subset\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n),\ \forall n\in N$. 根据 $e(\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n),S)=H(\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n),S)\to0$ 以及 S 的紧性知存在序列 $\{(\bar{x}_n,\bar{y}_n)\}\subset S$ 满足 $\|(x_n,y_n)-(\bar{x}_n,\bar{y}_n)\|=d\{(x_n,y_n),S\}\leqslant e(\Omega(\sigma_n,\varepsilon_n),S)\to0$.

再由 S 是紧集可知，存在 $\{(\bar{x}_n,\bar{y}_n)\}$ 的子序列 $\{(\bar{x}_{n_k},\bar{y}_{n_k})\}$ 强收敛于 $(\bar{x},\bar{y})\in S$. 因此 $\{(x_n,y_n)\}$ 也存在相应的子序列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}$ 强收敛于 $(\bar{x},\bar{y})$. 故 SEP 是广义扰动 LP 适定的.

最后，当分裂平衡问题具有非空有界解集时证得分裂平衡问题是广义扰动适定的.

定理 2.3 设 X、Y 是有限维空间，如果满足以下条件：

(i) $\forall x\in C,y\in Q$ 有 $\tilde{f}(\cdot,x,x)\geqslant0,\tilde{g}(\cdot,y,y)\geqslant0$;

(ii) $\forall p\in P,\tilde{f}(p,\cdot,\cdot)$ 和 $\tilde{g}(p,\cdot,\cdot)$ 都是单调半连续的；

(iii) $\forall p\in P,x\in C,y\in Q,\tilde{f}(p,x,\cdot)$ 和 $\tilde{g}(p,y,\cdot)$ 都是凸的；

(iv) $\forall x\in C,y\in Q,\tilde{f}(\cdot,x,\cdot)$ 和 $\tilde{g}(\cdot,y,\cdot)$ 均连续；

则当 SEP 的解集 S 非空有界时，SEP 是广义扰动适定的.

证明：设 S 是非空有界的，令 $p_n\to p^*$，任取 $\{(x_n,y_n)\}\subset X\times Y$ 为 SEP 相应于 $\{p_n\}$ 的扰动近似序列，则存在 $0<\varepsilon_n\to0$ 使得：

$x_n\in C,\ \tilde{f}(p_n,x_n,x)+\varepsilon_n\|x_n-x\|\geqslant0,\ \forall x\in C,n\in N,$

$y_n\in Q,\ \|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n,\tilde{g}(p_n,y_n,y)+\varepsilon_n\|y_n-y\|\geqslant0,\ \forall y\in Q,n\in N.$

下面用反证法证明，假设 $d((x_n,y_n),S)\not\to0$，则存在

$\tau>0$使得当 n 足够大时,

$$(x_n,y_n)\notin S+\tau B, \tag{8}$$

其中 B 为一个单位闭球. 任取$(\bar{x},\bar{y})\in S$,即 $f(\bar{x},x)\geqslant 0,\forall x\in C,\bar{y}=A\bar{x}$ 满足 $g(\bar{y},y)\geqslant 0,\forall y\in Q$. 由式(8)可知,存在 $t_n\in[0,1]$使得

$$(u_n,v_n):=t_n(x_n,y_n)+(1-t_n)(\bar{x},\bar{y})\in bd(S+\tau B) \tag{9}$$

其中 bd 表示集合的边界. 由 S 有界可知$\{(u_n,v_n)\}$是有界的. 不失一般性,假设$(u_n,v_n)\to(\bar{u},\bar{v})\in C\times Q$ 且 $t_n\to t^*\in[0,1]$. 从式(9)可知$(\bar{u},\bar{v})\notin S$. 结合$\tilde{f}(p,\cdot,\cdot)$的单调性以及$\tilde{f}(p,x,\cdot)$的凸性可推得,对$\forall x\in C$ 有

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(p_n,x,u_n)&=\tilde{f}(p_n,x,t_nx_n+(1-t_n)\bar{x})\\
&\leqslant t_n\tilde{f}(p_n,x,x_n)+(1-t_n)\tilde{f}(p_n,x,\bar{x})\\
&\leqslant -t_n\tilde{f}(p_n,x_n,x)+(1-t_n)\tilde{f}(p_n,x,\bar{x})\\
&\leqslant t_n\cdot\varepsilon_n\|x_n-x\|+(1-t_n)\tilde{f}(p_n,x,\bar{x})\\
&=t_n\cdot\varepsilon_n\left\|\frac{1}{t_n}(u_n-\bar{x})+\bar{x}-x\right\|+\\
&\quad(1-t_n)\tilde{f}(p_n,x,\bar{x})\\
&\leqslant t_n\cdot\varepsilon_n\cdot\frac{1}{t_n}\|u_n-\bar{x}\|+t_n\cdot\varepsilon_n\|\bar{x}-x\|+\\
&\quad(1-t_n)\tilde{f}(p_n,x,\bar{x})\\
&=\varepsilon_n\|u_n-\bar{x}\|+t_n\cdot\varepsilon_n\|\bar{x}-x\|+\\
&\quad(1-t_n)\tilde{f}(p_n,x,\bar{x})
\end{aligned} \tag{10}$$

当 $n\to\infty$时,根据$\tilde{f}(\cdot,x,\cdot)$的连续性,再结合式(10)可推得

$\tilde{f}(p^*,x,\bar{u})\leqslant(1-t^*)\tilde{f}(p^*,x,\bar{x}),\forall x\in C$,

从而结合引理1.1可知$f(x,\bar{u})\leqslant 0,\forall x\in C$.

类似地,结合$\tilde{g}(p,\cdot,\cdot)$的单调性,$\tilde{g}(p,y,\cdot)$的凸性,$\tilde{g}(\cdot,y,\cdot)$的连续性以及引理1.1又可推得 $g(y,\bar{v})\leqslant 0,\forall y\in Q$.

另一方面,根据式(9)以及$\|y_n-Ax_n\|\leqslant\varepsilon_n$ 可知

$$\begin{aligned}
\|v_n-Au_n\|&=\|t_ny_n+(1-t_n)\bar{y}-A(t_nx_n+(1-t_n)\bar{x})\|\\
&=\|t_n(y_n-Ax_n)+(1-t_n)(\bar{y}-A\bar{x})\|\\
&=\|t_n(y_n-Ax_n)\|\\
&\leqslant t_n\cdot\varepsilon_n
\end{aligned} \tag{11}$$

当 $n\to\infty$时,结合式(11)可知 $\bar{v}=A\bar{u}$.

综上可得,$(\bar{u},\bar{v})\in C\times Q,f(x,\bar{u})\leqslant 0,\forall x\in C,\bar{v}=A\bar{u}$ 满足 $g(y,\bar{v})\leqslant 0,\forall y\in Q$,结合引理1.1可知$(\bar{u},\bar{v})\in S$,这与$(\bar{u},\bar{v})\notin S$ 矛盾. 故 $d((x_n,y_n),S)\to 0$,即SEP是广义扰动适定的.

3 结束语

主要讨论分裂平衡问题在 Lucchetti 与 Patrone 意义下带扰动的适定性. 分别给出分裂平衡问题扰动 Levitin-Polyak 适定性和广义扰动 Levitin-Polyak 适定性的距离刻画;并获得分裂平衡问题广义扰动适定性的充分条件,即当分裂平衡问题具有非空有界解集时分裂平衡问题是广义扰动适定的. 这些结果在分裂平衡问题的稳定性分析以及算法收敛性分析中都起着重要作用.

参考文献:

[1] Tykhonov A N. On the stability of the functional optimization problem[J]. USSR J. Computational Mathematics and Mathematical Physics,1966,6:631-634.

[2] Levitin E S,Polyak B T. Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems[J]. Sov. Math. Dokl.,1966,7:764-767.

[3] Furi M,Vignoli A. About well-posed optimization problems for functionals in metric spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1970,5(3):225-229.

[4] Furi M,Vignoli A. A characterization of well-posed minimum problems in a complete metric space[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1970,5:452-461.

[5] Zolezzi T. Well-posedness criteria in optimization with application to the calculus of variations[J]. Nonlinear Analysis,1995,25:437-453.

[6] Zolezzi T. Extended well-posedness of optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1996,91:257-266.

[7] Zolezzi T. Well-posedness and optimization under perturbations[J]. Annals of Operations Research,2001,101:351-361.

[8] Dontchev A L,Zolezzi T. Well-posed optimization problems[M]. Springer,2006.

[9] Huang X X,Yang X Q. Generalized Levitin-Polyak well-posedness in constrained optimization[J]. SIAM Journal on Optimization,2006,17:243-258.

[10] Del Prete I,Lignola M B,Morgan J. New concepts of well-posedness for optimization problems with variational inequality constraints[J]. J Inequal Pure Appl Math. 2003,4.

[11] Wang G,Huang X X. Levitin-Polyak well-posedness for optimization problems with generalized equilibrium constraints[J]. Journal of Optimization

Theory and Applications,2012,153(1):27-41.

[12] Anh L Q,Khanh P Q,Van D T M. Well-Posedness Under Relaxed Semicontinuity for Bilevel Equilibrium and Optimization Problems with Equilibrium Constraints[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2012,153:42-59.

[13] Hu R,Fang Y P,Huang N J. Well-posedness for equilibrium problems and for optimization problems with equilibrium constraints[J]. Computational and Applied Mathematics,2008,55(1):89-100.

[14] Peng L H,Li C,Yao J C. Well-posedness of a class of perturbed optimization problems in Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,346(2):384-394.

[15] Ferrentino R,Boniello C. On the Well-Posedness for Optimization Problems: A Theoretical Investigation[J]. Applied Mathematics,2019,10(1):19-38.

[16] Lucchetti R,Patrone F. A characterization of Tyhonov well-posedness for minimum problems, with applications to variational inequalities[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization,1981,3(4):461-476.

[17] Lucchetti R,Patrone F. Some properties of "well-posed" variational inequalities governed by linear operators[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization,1982/83,5(3):349-361.

[18] Lignola M B,Morgan J. Well-posedness for optimization problems with constraints defined by variational inequalities having a unique solution[J]. Journal of Global Optimization,2000,16(1):57-67.

[19] Lignola M B, Morgan J. Approximate solutions and α-well-posedness for variational inequalities and Nash equilibria[J]. In Decision & Control in Management Science, Springer, Boston, MA. 2002:367-377.

[20] Lignola M B, Morgan J. α-Well-posedness for Nash equilibria and for optimization problems with Nash equilibrium constraints[J]. Journal of Global Optimization,2006,36:439-459.

[21] Petrusel A,Rus I A,Yao J C. Well-posedness in the generalized sense of the fixed point problems for multivalued operators[J]. Taiwanese Journal of Mathematics,2007,11,903-914.

[22] Fang Y P,Huang N J,Yao J C. Well-posedness of mixed variational inequalities,inclusion problems and fixed point problems[J]. Journal of Global Optimization,2008,41:117-133.

[23] Yu J, Yang H, Yu C. Well-posed Ky Fan's point, quasi-variational inequality and Nash equilibrium problems[J]. NonlinearAnalysis, 2007, 66:777-790.

[24] Hu R,Fang Y P. Levitin-Polyak well-posedness of variational inequalities[J]. NonlinearAnalysis, 2010,72:373-381.

[25] Wang S,Huang N,O'Regan D. Well-posedness for generalized quasi-variational inclusion problems and for optimization problems with constraints[J]. Journal of Global Optimization,2012, 55(1):189-208.

[26] Ceng L C,Hadjisavvas N,Schaible S,et al. Well-posedness for mixed quasivariational-like inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2008,139,109-225.

[27] Long X J,Huang N J. Metric characterizations of α-well-posedness for symmetric quasi-equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2009,45:459-471.

[28] Virmani G,Srivastava M. On Levitin-Polyak α-well-posedness of perturbed variational-hemivariational inequality[J]. Optimization,2015,64:1153-1172.

[29] Xiao Y B,Huang N J, Wong M M. Well-posedness of hemivariational inequalities and inclusion problems[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2011,15:1261-1276.

[30] Xie T,Li X S. Well-posedness of second order differential mixed inverse quasivariational inequalities[J]. Communications on Applied Nonlinear Analysis,2020,27:33-48.

[31] Lin L J,Chuang C S. Well-posedness in the generalized sense for variational inclusion and disclusion problems and well-posedness for optimization problems with constraint[J]. NonlinearAnalysis, 2009,70:3609-3617.

[32] Censor Y,Gibali A,Reich S. Algorithms for the split variational inequality problem[J]. Numerical Algorithms,2012,59:301-323.

[33] Hu R,Fang Y P. Characterizations of Levitin-Polyak well-posedness by perturbations for the split variational inequality problem[J]. Optimiza-

tion,2016,65(9):1717-1732.
[34] Hu R, Liu Y K, Fang Y P. Levitin-Polyak well-posedness by perturbations of split minimization problems[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications,2017,19:2209-2223.
[35] 高友. Banach 空间中分离平衡问题的 Levitin-Polyak-α 适定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2014,37(4):455-459.
[36] 王瑞,胡容. 分裂平衡问题的 Levitin-Polyak 适定性[J]. 成都信息工程大学学报,2021,36(5):570-575.
[37] 顾亚静. 下半连续复合函数闭性的研究[J]. 洛阳理工学院学报(自然科学版),2016,26(2):90-93.
[38] Kuratowski K. Topology, Vols 1 and 2[M]. Academic Press, New York,1968.
[39] Klein E, Thompson A C. Theory of Correspondences[M]. John Wiley & Sons, Inc., New York,1984.

Levitin-Polyak Well-posedness by Perturbations of Split Equilibrium Problem

WANG Rui, HU Rong
(College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China)

Abstract: The purpose of this paper is to extend the concept of well-posedness in the sense of Lucchetti and Patrone to the problem of splitting equilibrium, and to investigate the Levitin-Polyak well-posedness by perturbations (in the Lucchetti and Patrone's sense) of the split equilibrium problem in Banach space. First, the metric characterizations of Levitin-Polyak well-posedness by perturbations and generalized Levitin-Polyak well-posedness by perturbations are obtained respectively by using approximate solution set. And then, it is proved that the split equilibrium problem is generalized well-posedness by perturbations when the problem has a nonempty and bounded solution set.

Keywords: split equilibrium problem; Levitin-Polyak well-posedness by perturbations; approximating solution set; metric characterization; nonemptiness and boundedness of the solution set