

文章编号: 2096-1618(2023)06-0728-06

斜压大气中任意频率惯性重力内波不稳定的判据

吴 洪¹, 牛 宁¹, 豆京华²

(1. 中国气象局气象干部培训学院, 北京 100081; 2. 中国气象局气象干部培训学院河北分院, 河北 保定 071000)

摘要:为分析斜压大气中任意频率惯性重力内波的稳定性,利用非静力平衡的 Boussinesq 近似的方程组和正交模方法,着重对波动不稳定的充分条件(即判据)进行讨论。主要结果表明:当基流随高度增大时,波动不稳定的必要条件是波动的等位相线向北倾斜;当基流随高度减小时,波动不稳定的必要条件是波动的等位相线向南倾斜。当大气为层结稳定时,波动不稳定的充分条件即判据是环境大气不但满足 $S^4 - N^2 F^2 > 0$,且波动等位相面的倾斜率必须位于 $\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 与 $\frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 之间。对于层结稳定、惯性稳定的环境大气,若 $S^4 > N^2 F^2$,当环境大气的基流随高度增大时, $\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 小于环境大气的等绝对动量面的倾斜率, $\frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 大于环境大气的等位温面的倾斜率。

关键词:惯性重力内波;稳定性;对称不稳定;斜压大气

中图分类号:P433

文献标志码:A

doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2023.06.015

0 引言

描述中尺度运动的控制方程组,包含的特征波动是频谱较广的重力波,采用 Boussinesq 近似后,该方程组包含的特征波动则是低频的重力波,如惯性重力内波^[1]。惯性重力内波常与暴雨、台风、强对流等天气有关^[2-8]。

不考虑基本气流,大气中惯性重力内波的频率为 $\omega^2 = \frac{N^2 k^2 + f_0^2 m^2}{k^2 + m^2}$,惯性重力内波不稳定的必要条件是 $N^2 < 0$,不稳定的充要条件为 $N^2 k^2 + f_0^2 m^2 < 0$ ^[1]。

考虑基本气流具有水平和垂直切变,刘式适等^[9],李崇银等^[10]分析讨论了惯性重力内波的不稳定性。同样在具有水平和垂直切变基本气流的大气中,B J Hoskins^[11],D A Bennetts 等^[12],陆汉城等^[1]采用大气线性波动的分析方法,得出对称不稳定的判据。不少气象学家利用“气块法”也得到对称不稳定的判据^[13-16]。这两类不稳定判据的表达式是相同的,即等熵面坡度大于等绝对动量面的坡度,似乎表明对称不稳定与惯性重力内波不稳定是相互对等的。对称不稳定理论被广泛运用于解释中纬度的带状降雨^[17-25]。对称不稳定判据的普及应用性远大于惯性重力内波不稳定,但这个不稳定的判据,只有当波动或扰动的频率为最小时才成立。但对称不稳定和惯性重力内波不稳

定的判据,都只是在设定波动频率或振动(扰动)频率最小时推导出来的,且这个最小频率在波动等位相面^[1,9-12]为特定值时才具有。

大气中惯性重力波具有比较宽的频谱。在斜压大气中,为了解惯性重力内波的频率方程、任意频率的惯性重力内波,其稳定性及判据等,本文采用标准的正交模方法,着重分析斜压大气中任意频率的惯性重力内波的稳定性,得到相应的波动不稳定性及其判据,以期更合理地应用在带状云系和降水发生发展的机理研究和实际业务中。

1 斜压大气中的惯性重力内波

满足绝热、无摩擦的 Boussinesq 近似的大气运动方程组,可用于描述惯性重力内波^[1,9-10,13-15,26-27]:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_0 v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_0 u \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{g}{\theta_0} \theta' \\ \frac{d\theta'}{dt} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

式中, u, v, w 表示空气块运动的 x, y, z 方向的速度分量; p 是气压场, p' 是相对基本状态气压场 \bar{p} 的偏差; ρ

为空气密度, ρ_0 表示基本状态的空气密度的典型值, 为常数; $\theta' = \theta - \bar{\theta}$, θ' 是相对位温基本状态 $\bar{\theta}$ 的偏差, θ_0 表示基本状态的位温的典型值, 为常数; f_0 为地转参数, 对惯性重力内波可取为常数。式(1)表明大气运动是非静力平衡的。

1.1 频率方程

假定斜压大气的基本气流为纬向的, 即 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{u}(y, z), 0, 0)$, 且满足地转平衡 $\bar{u} = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{p}}{\rho_0} \right)$ 和热成风平衡 $f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$ 。

不失一般性, 假定扰动只在 y - z 平面内, 即与 x 无关。将式(1)线性化, 得到描述波动的方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - (f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})v' + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) &= 0 \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p'}{\rho_0} \right) - \frac{g}{\theta_0} \theta' &= 0 \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中, (u', v', w') 表示 x, y, z 方向的扰动速度分量。令 $F^2 \equiv f_0(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})$, $N^2 \equiv \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$, $S^2 \equiv f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$, F^2, N^2 分别为惯性振荡频率和浮力频率, 且 $N^2 > 0$, 即 $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} > 0$, 表示环境大气是层结稳定的, 也称为静力稳定; $F^2 > 0$, 在北半球即 $(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) > 0$, 表示大气是惯性稳定的。利用基本状态的热成风平衡关系, $S^2 = -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$, 这表明基本状态的流场分布与温度场分布存在限制性约束。

因为 Boussinesq 近似的大气运动满足大气不可压缩性, 根据数学和流体力学的相关理论, 可引入流函数 Ψ 表示扰动速度, 即 $v' \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial z}$, $w' \equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ 。

将用流函数表示的扰动速度代入式(2), 消去其他扰动量, 仅保留流函数, 得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} = 0 \quad (3)$$

对于“无界”大气, 可设波动的形式解为 $\Psi = Ae^{i(l y + m z - \omega t)}$, ω, l, m 分别表示惯性重力内波的频率、 y 方向的波数、 z 方向的波数。代入式(3)进一步运算得斜压大气中惯性重力内波的频率方程

$$\omega^2 = \frac{N^2 l^2 + F^2 m^2 + 2S^2 l m}{l^2 + m^2} \quad (4)$$

由式(4)可知, 如果惯性重力内波只在 y 或 z 方向传播, 即 $m \equiv 0$ 或 $l \equiv 0$, 则式(4)蜕变为浮力振荡或惯性振荡, 显然式(4)作为惯性重力内波的频率方程, l, m 均不等于零。惯性重力内波的最小、最大频率分别为^[1,9-10,13]

$$\begin{aligned} \omega_{\min}^2 &= \frac{1}{2} \{ (N^2 + F^2) - [4S^4 + (N^2 - F^2)^2]^{1/2} \} \sim F^2 \\ \omega_{\max}^2 &= \frac{1}{2} \{ (N^2 + F^2) + [4S^4 + (N^2 - F^2)^2]^{1/2} \} \sim N^2 \end{aligned} \quad (5)$$

1.2 相速与群速

令 $K^2 \equiv l^2 + m^2$, K 表示二维波动的波数, $\vec{K} \equiv \vec{l}j + \vec{m}k$ 。波动的相速为

$$\vec{C} \equiv \frac{\omega}{K} \vec{K} = \pm \frac{(N^2 l^2 + F^2 m^2 + 2S^2 l m)^{1/2}}{(l^2 + m^2)^{3/2}} (\vec{l}j + \vec{m}k) \quad (6)$$

其中 \vec{j}, \vec{k} 分别表示 y, z 方向的单位矢。

波动的群速:

$$\begin{aligned} \vec{C}_g &= C_{gy} \vec{j} + C_{gz} \vec{k} \\ C_{gy} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial l} = \pm \frac{m [(N^2 - F^2) l m - S^2 (l^2 - m^2)]}{(l^2 + m^2)^{3/2} (N^2 l^2 + F^2 m^2 + 2S^2 l m)^{1/2}} \\ C_{gz} &\equiv \frac{\partial \omega}{\partial m} = \mp \frac{l [(N^2 - F^2) l m - S^2 (l^2 - m^2)]}{(l^2 + m^2)^{3/2} (N^2 l^2 + F^2 m^2 + 2S^2 l m)^{1/2}} \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)、(7)可得

$$\vec{C} \cdot \vec{C}_g = 0$$

在具有水平和垂直切变的基流中, 惯性重力内波的传播方向(相速度)与能量传播方向(群速度)相互垂直, 这一性质与不考虑基本气流的惯性重力内波的一致。

2 斜压大气中的惯性重力内波稳定性

由于惯性重力内波的波数 l, m 均不等于零。令 $\varphi = ly + mz - \omega t$ 表示波动的位相, 当其等于常数时表示波动等位相面。则等位相面的倾斜率:

$$\tan \alpha \equiv \frac{\Delta z}{\Delta y} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) / \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = - \frac{l}{m} \quad 0 \leq \alpha \leq \pi \quad (8)$$

其中 α 为等位相面与 y 轴正向的夹角。

根据惯性重力内波形成的原理, 只有在层结稳定 $N^2 > 0$ 和惯性稳定 $F^2 > 0$ 的环境大气中, 惯性重力内波才能形成, 即一般 $N^2 l^2 + F^2 m^2 > 0$ 。由式(4)可知, 当 $\omega^2 > 0$ 时, 惯性重力内波是稳定的; 反之, 惯性重力内波是不稳定的。因此, 若 $\omega^2 < 0$, 必须:

$$S^2 l m < 0 \quad (9)$$

式(9)即是斜压大气中惯性重力内波不稳定的必要条

件。

环境大气的风一般是随高度增大的,在北半球 $S^2 > 0$, 则惯性重力内波不稳定的必要条件可改写为

$$lm < 0 \quad (10)$$

由式(8)可知,式(10)可以改写为

$$\operatorname{tg} \alpha > 0 \quad (11)$$

即 $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$, 等位相面向北倾斜(图1),波动向北(南)、向下(上)传播。当惯性重力内波的等位相面向南倾斜时,波动是稳定的,波动向北(南)、向上(下)传播。

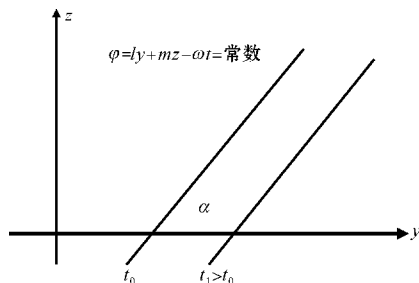


图1 等位相面示意图(α 是等位相面与 y 轴的夹角, t_0, t_1 分别表示不同的时刻)

如果环境大气基本气流随高度减小时,在北半球 $S^2 < 0$, 则此时惯性重力内波不稳定的必要条件为

$$lm > 0 \text{ 或 } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad (12)$$

式(12)表明,风速随高度减小时,惯性重力内波不稳定的必要条件是等位相面向南倾斜,波动向北(南)、向上(下)传播。多普勒天气雷达监测表明,有时低空急流表现出“轴状”的结构,即其下风速随高度增大、而其上一定的层次内风速随高度减小,因此,当低空急流呈“轴状”结构时,其上的环境大气 $S^2 < 0$ 。

一般情况下 $N^2 > 0, F^2 > 0$, 由式(4)可知,斜压大气中惯性重力内波不稳定的充分条件为

$$N^2 l^2 + F^2 m^2 + 2S^2 lm < 0 \quad (13)$$

利用式(8),式(13)可改写为

$$N^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2S^2 \operatorname{tg} \alpha + F^2 < 0 \quad m^2 \neq 0 \quad (14)$$

令

$$\Delta \equiv S^4 - N^2 F^2 \quad (15)$$

由于 $N^2 > 0$, 因而当 $\Delta > 0$, 即 $S^4 > N^2 F^2$ 时,若

$$\frac{S^2 - \sqrt{\Delta}}{N^2} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{S^2 + \sqrt{\Delta}}{N^2} \quad (16)$$

式(14)成立,即惯性重力内波不稳定;若 $\Delta = 0$ 或 $\Delta < 0$ 时,式(14)均无解,即无论波动等位相面如何倾斜, $\operatorname{tg} \alpha$ 为任何值,波动都是稳定的。

因此,无论环境基流是随高度增大或减小,斜压大气中惯性重力内波不稳定的充分条件是环境大气满足

$S^4 > N^2 F^2$ 、且波动等位相面的倾斜度同时也须满足 $\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 。在层结稳定、环境

大气基流随高度增大的斜压大气中, $\frac{F^2}{S^2} >$

$\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 、 $\frac{F^2}{S^2} \neq \frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 、 $\frac{S^2}{N^2} < \frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$;在层结稳定、环境大气基流随高度减小

的斜压大气中, $\frac{F^2}{S^2} < \frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 、 $\frac{F^2}{S^2} \neq \frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 、

$\frac{S^2}{N^2} > \frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 。

$\frac{S^2}{N^2}$ 、 $\frac{F^2}{S^2}$ 可分别表示环境大气等位温面、等绝对动

量面的倾斜程度^[1,11-16]。由上述讨论可知,当环境大气等位温面、等绝对动量面重合或等位温面的倾斜度小于等绝对动量面时,重力惯性内波是稳定的。当环境大气等位温面的倾斜度大于等绝对动量面时,若环境大气基流随高度增大 $S^2 > 0$, 则重力惯性内波等位

相面的倾斜度满足 $\frac{S^2}{N^2} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 或

$\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{F^2}{S^2}$ 时,波动是不稳定的;若环境大

气基流随高度减小 $S^2 < 0$, 则重力惯性内波等位相面的倾斜度满足 $\frac{S^2}{N^2} > \operatorname{tg} \alpha > \frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ 或 $\frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2} >$

$\operatorname{tg} \alpha > \frac{F^2}{S^2}$ 时,波动也是不稳定的。由此进一步可知,如果

对称不稳定的判据完全等同于惯性重力内波不稳定的判据,则并非气块斜升的路径只能位于环境大气等位温面、等绝对动量面之间时才存在对称不稳定。

频率方程式(4)可改写为

$$\omega^2 = a - b \cos 2(\alpha - \alpha_0) \quad (17)$$

式中:

$$a \equiv \frac{1}{2}(N^2 + F^2)$$

$$b \equiv \sqrt{S^4 + \left[\frac{1}{2}(N^2 - F^2) \right]^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(N^2 + F^2)^2 + 4(S^4 - N^2 F^2)}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 \equiv \frac{2S^2}{(N^2 - F^2)} \quad (18)$$

其中, b 恒大于零。

一般 $N^2 > F^2$ 。若北半球的基本气流随高度增大, $S^2 > 0$, 则 $\operatorname{tg} 2\alpha_0 > 0$, α_0 的取值 $0 \sim \frac{\pi}{4}$ 。若北半球某些区域出

现基本气流随高度减小, $S^2 < 0$, 则 $\text{tg}2\alpha_0 < 0$, $\frac{\pi}{4} < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ 。

由式(17)可知, 当 $(\alpha - \alpha_0) = \frac{\pi}{2}$ 时, 波动频率最大, $\omega_{\max}^2 = a + b > 0$, 波动恒为稳定的。当 $\alpha = \alpha_0$ 时, 波动频率最小, $\omega_{\min}^2 = a - b$, 若 $S^4 > N^2 F^2$, 则 $a < b$, 波动是不稳定的。此与很多气象学家的结论一致^[1, 9-10, 13-16]。须特别注意的是, $\alpha = \alpha_0$ 时, 波动频率最小; 但波动的频率最小时, 并非一定是 $\alpha = \alpha_0$ 。

对于任意频率的惯性重力内波, 当 $-\frac{\pi}{4} < (\alpha - \alpha_0) < \frac{\pi}{4}$, ω^2 才有可能小于 0, 即波动发生不稳定, 可见对应于 $\alpha = \alpha_0$ 的最小频率波动的不稳只是一个特例; 当 $\frac{\pi}{4} \leq (\alpha - \alpha_0) \leq \frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2} \leq (\alpha - \alpha_0) \leq -\frac{\pi}{4}$, ω^2 恒大于 0, 即波动稳定。因此, 任意频率惯性重力内波不稳定的充分条件即判据比最小频率惯性重力内波不稳定的复杂, 不只是 $S^4 > N^2 F^2$ 。因此, 在实际应用中, 当环境状态条件满足 $N^2 F^2 - S^4 < 0$ 时, 带状云系和降水的发生发展, 不宜简单解释为在这样的环境中惯性重力内波强烈发展或对称不稳定发生的结果。

若环境大气是层结不稳定的层结, $N^2 < 0$, 则令

$$D^2 \equiv -N^2 > 0 \quad (19)$$

式(14)改写为

$$D^2 \text{tg}^2 \alpha + 2S^2 \text{tg} \alpha - F^2 > 0 \quad m^2 \neq 0 \quad (20)$$

设

$$\tilde{\Delta} \equiv S^4 + D^2 F^2 = S^4 - N^2 F^2 \quad (21)$$

当环境大气是惯性稳定的, $F^2 > 0$, 可知 $\tilde{\Delta} > 0$, 即 $S^4 > N^2 F^2$ 。此时, 若要式(20)成立, 即惯性重力内波不稳定, 必须是波动等位相面的倾斜度满足 $\text{tg} \alpha >$

$\frac{-S^2 + \sqrt{\tilde{\Delta}}}{-N^2}$, 或 $\text{tg} \alpha < \frac{-S^2 - \sqrt{\tilde{\Delta}}}{-N^2}$; 否则, 波动稳定。当环境大气是惯性不稳定的, $F^2 < 0$, 若 $S^4 - N^2 F^2 > 0$, 则惯性重力

内波不稳定的充分条件依然是 $\text{tg} \alpha > \frac{-S^2 + \sqrt{\tilde{\Delta}}}{-N^2}$, 或 $\text{tg} \alpha <$

$\frac{-S^2 - \sqrt{\tilde{\Delta}}}{-N^2}$; 若 $S^4 = N^2 F^2$, 惯性重力内波不稳定的充分条

件是 $\text{tg} \alpha \neq \frac{S^2}{N^2}$, 即波动的等位相面、环境大气的等熵面和等绝对动量面三者不能重合; 若 $S^4 < N^2 F^2$, 无论波动的等位相面的倾斜度如何, 波动都将是不稳定的。可见, 环境大气层结不稳定时, 对流所激发的惯性重力内波的稳定性变化非常复杂, 可能发生稳定, 也可能发生不稳定。

若环境斜压大气是中性层结, $N^2 = 0$, 惯性重力内波变为纯惯性内波。其稳定性的判据为

$$\text{tg} \alpha > \frac{F^2}{2S^2} \quad m > 0, m^2 \neq 0, S^2 > 0 \quad (22)$$

或

$$\text{tg} \alpha < \frac{F^2}{2S^2} \quad m < 0, m^2 \neq 0, S^2 > 0 \quad (23)$$

若环境大气基本气流随高度减小, $S^2 < 0$, 则此惯性内波恒稳。

若不考虑基流的垂直切变, $S^2 = 0$, 表示环境大气是正压的或正好位于急流轴上, 由式(15)知 $\Delta = -N^2 F^2$ 。此时惯性重力内波频率方程为 $\omega^2 = \frac{N^2 k^2 + F^2 m^2}{l^2 + m^2}$ 。这样, 惯性重力内波不稳定的充要条件为 $N^2 l^2 + F^2 m^2 < 0$ 。

若不考虑基流的水平切变, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0$, 此时惯性重力内波频率方程的形式类似于式(4), 只是用 f_0^2 替代 F^2 , 相应的惯性重力内波稳定性类似于前述讨论。

若不考虑地球自转作用, $F^2 = 0$, 惯性重力内波变为纯重力内波, 其稳定性的判据为

$$\text{tg} \alpha > \frac{2S^2}{N^2} \quad l > 0, m^2 \neq 0 \quad (24)$$

或

$$\text{tg} \alpha < \frac{2S^2}{N^2} \quad l < 0, m^2 \neq 0 \quad (25)$$

3 静力平衡的影响

由物理机制可知, 只有大气出现不断变化的水平辐散、辐合作用, 使得气块在铅直方向出现上下运动并随时间变化, 才可形成惯性重力内波^[13-15, 26-27]。

若假定大气扰动满足静力平衡, 即 $\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{g}{\theta_0} \theta'$, 则式(2)

改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} - (f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) v' + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f u' + \frac{\partial p'}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial w'}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \theta'}{\partial t} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

由式(18)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad (27)$$

式(27)与式(26)中的第3个方程分别表示扰动的水平散度不随时间变化、气块的铅直运动不随时间变化,这直接破坏了惯性重力内波形成的物理机制,即大气中不能形成惯性重力内波,也就不存在该波动的稳定性。因此,在 Boussinesq 近似的大气运动方程组中不能采用静力平衡条件。

4 结论

利用绝热、无摩擦、Boussinesq 近似的大气运动方程组,采用小扰动法和正交模法,得到斜压大气中惯性重力内波的频率方程,着重分析、讨论任意频率惯性重力内波的稳定性。主要结论如下:

(1)当大气是层结稳定、惯性稳定,且基本气流随高度增大时,惯性重力内波不稳定的必要条件是等位相面向北倾斜;若基本气流随高度减小,惯性重力内波不稳定的必要条件是等位相面向南倾斜。

(2)当大气是层结稳定、惯性稳定,惯性重力内波不稳定的充分条件是环境大气的 $S^4 > N^2 F^2$ 、且惯性重力内波等位相面的倾斜度位于 $(\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}, \frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2})$ 之间。

(3)对于层结稳定、惯性稳定的环境大气,若 $S^4 > N^2 F^2$,当环境大气的基流随高度增大时, $\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2} < \frac{F^2}{S^2}$ 和 $\frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2} > \frac{F^2}{N^2}$;当环境大气的基流随高度减小时, $\frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2} > \frac{F^2}{S^2}$ 和 $\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2} < \frac{F^2}{N^2}$ 。

(4)当大气是层结不稳定时,若惯性稳定,则惯性重力内波不稳定的充分条件是 $S^4 > N^2 F^2$ 、且波动位相面的倾斜度 $\text{tg}\alpha > \frac{-S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{-N^2}$, 或 $\text{tg}\alpha < \frac{-S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{-N^2}$ 。

(5)当大气是层结不稳定时,若惯性也是不稳定的,惯性重力内波不稳定的充分条件分别是 $S^4 > N^2 F^2$ 、且波动位相面的倾斜度 $\text{tg}\alpha > \frac{-S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{-N^2}$, 或 $\text{tg}\alpha < \frac{-S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{-N^2}$;或 $S^4 = N^2 F^2$ 、且 $\text{tg}\alpha \neq \frac{S^2}{N^2}$;或 $S^4 - N^2 F^2 < 0$ 。

(6)用 Boussinesq 近似的大气运动方程组讨论惯性重力波或重力波或惯性波时,不能采用静力平衡条件。

可见,在基流、基本温度场分布不同的环境大气中,任意频率惯性重力内波的不稳定判据呈多种不同的表达式,相当复杂,并不仅是 $N^2 F^2 - S^4 < 0$ 。波动的等

位相面倾斜度高于环境等位温面(线)的倾斜度或低于环境等绝对动量面(线)的倾斜度,波动也能发生不稳定。波动振动或气块的斜升路径方向、等位相面倾斜角度等于某个特定的值 $\text{tg}2\alpha = \frac{2S^2}{(N^2 - F^2)}$ 时,波动的

频率最小,但波动的频率最小时,等位相面倾斜角度并不一定满足这个特定值。因此,仅分析环境大气的等位温面、等绝对动量面的倾斜度,就判断惯性重力内波会发生强烈发展或发生对称不稳定,从而引发对流性带状云系和降水的发生发展,这样的结论相当不严谨。

本文只是从理论上讨论斜压大气中惯性重力内波不稳定的判据,在实际中如何应用,乃是今后进一步研究工作的方向。

参考文献:

- [1] 陆汉城,杨国祥. 中尺度天气原理和预报[M]. 北京:气象出版社,2004:1-40.
- [2] 胡伯威. 梅雨锋上 MCS 的发展、传播以及与低层“湿度锋”相关联的 CISK 惯性重力波[J]. 大气科学,2005,29(6):845-853.
- [3] 康建伟,陆汉城,钟科,等. 台风内部的中尺度波动与多边形眼墙的形成[J]. 热带气象学报,2007,23(1):21-26.
- [4] 李永平,郑运霞,方平治. 2009 年“莫拉克”台风登陆过程阵风特征分析[J]. 气象学报,2012,70(6):1188-1199.
- [5] 覃卫坚,寿绍文,高守亭,等. 一次冰雹过程的惯性重力波观测及数值模拟[J]. 地球物理学报,2010,53(5):1039-1049.
- [6] 孙继松,何娜,郭锐,等. 多单体雷暴的形变与列车效应传播机制[J]. 大气科学,2013,37(1):137-148.
- [7] 吴海英,曾明剑,蒋义芳,等. 一次雹暴过程中对流系统演变特征的模拟分析[J]. 高原气象,2021,40(3):569-579.
- [8] 赵玉春,王叶红,崔春光. 一次典型梅雨锋暴雨过程的多尺度结构特征[J]. 大气科学学报,2011,34(1):14-27.
- [9] 刘式适,刘式达. 大气动力学[M]. 2 版. 北京:北京大学出版社,1991:1-527.
- [10] 李崇银,刘式适,陈嘉滨,等. 动力气象学引论[M]. 北京:气象出版社,2005:1-114.
- [11] Hoskins B J. A role of potential vorticity in symmetric stability and instability[J]. Quart. J. of the Royal Meteor. Society,1974,100:480-482.
- [12] Bennetts D A, Hoskins B J. Conditional symmetric

- instability-a Possible Explanation for frontal rain-bands[J]. Quart. J. of the Royal Meteor. Society, 1979, 105: 945-962.
- [13] Holton J R, Hakim G J. 动力气象学引论[M]. 5版. 北京: 电子工业出版社, 2019: 1-227.
- [14] 吕美仲, 侯志明, 周毅. 动力气象学[M]. 北京: 气象出版社, 2004: 1-295.
- [15] 贺海晏, 简茂球, 乔云亭. 动力气象学[M]. 北京: 气象出版社, 2010: 1-154.
- [16] 朱乾根, 林锦瑞, 寿绍文, 等. 天气学原理和方法[M]. 4版. 北京: 气象出版社, 2007: 393-396.
- [17] Moore J T, Lambert T E. The Use of Equivalent Potential Vorticity to Diagnose Regions of Conditional Symmetric Instability [J]. Weather and Forecasting, 1993, 8(3): 301-308.
- [18] 周玉淑, 邓国, 黄仪虹. 长江流域一次暴雨过程中的不稳定条件分析[J]. 气象学报, 2003, 61(3): 323-333.
- [19] 张晓惠, 倪允琪. 华南前汛期锋面对流系统与暖区对流系统的个例分析与对比研究[J]. 气象学报, 2009, 67(1): 108-121.
- [20] 李英, 陈联寿, 钱传海, 等. 登陆台风 Rananim (0414) 环流内中尺度辐合线的形成和发展研究[J]. 气象学报, 2010, 68(5): 640-651.
- [21] 杨晓亮, 王咏青, 杨敏, 等. 一次暴雨与特大暴雪并存的华北强降水过程分析[J]. 气象, 2014, 10(12): 1446-1454.
- [22] 刘璐, 冉令坤, 周玉淑, 等. 北京"7.21"暴雨的不稳定性及其触发机制分析[J]. 大气科学, 2015, 39(3): 583-595.
- [23] 孙力, 董伟, 药明, 等. 1215号"布拉万"台风暴雨及降水非对称性分布的成因分析[J]. 气象学报, 2015, 73(1): 36-49.
- [24] 邓承之, 张亚萍, 方德贤, 等. 一次纬向暴雨过程的湿对称不稳定与锋生分析[J]. 气象, 2019, 45(11): 1527-1538.
- [25] 黄小刚, 费建芳, 孙吉明, 等. 2013年冬季长江中下游地区一次高架雷暴过程的成因分析[J]. 气象学报, 2017, 75(3): 429-441.
- [26] 伍荣生, 党人庆, 余志豪, 等. 动力气象学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983: 1-114.
- [27] 李国平. 新编动力气象学[M]. 北京: 气象出版社, 2014: 1-254.

Unstable Criterion about the Internal Inertial Gravity Wave with Any Frequency in the Baroclinic Atmosphere

WU Hong¹, NIU Ning¹, DOU Jinghua²

(1. China Meteorological Administration Training Center, Beijing 100081, China; 2. Hebei Sub-center of China Meteorological Administration Training Center, Baoding 071000, China)

Abstract: To analyze the stability of the internal inertial gravity wave with any frequency in the baroclinic atmosphere, this paper the sufficient condition of the instability about the wave is discussed with the emphasis on which is the unstable criterion, by the equations with Boussinesq approximation and non-hydrostatic balance and the method of normal mode. The main results show that when the basic flow increases with height, the necessary condition of the instability of the wave is that the slope of the constant phase line of the wave is slanted towards north. While the basic flow decreases with height, the necessary condition of the instability is that the wave is slant towards south. It is the sufficient condition of the instability about the internal inertial gravity wave that not only there is $S^4 - N^2 F^2 > 0$ about the atmosphere, but also the slope of the phase line of the internal inertial gravity wave is greater than $\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ and less than $\frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ in the baroclinic atmosphere when the atmosphere is the stable of stratification. If $S^4 > N^2 F^2$ is greater than zero, the $\frac{S^2 - \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ is less than the slope of constant absolute momentum, and the $\frac{S^2 + \sqrt{S^4 - N^2 F^2}}{N^2}$ is greater than the slope of the equipotential temperature when there are the stable of stratification and inertial stable in the baroclinic atmosphere.

Keywords: internal inertial gravity wave; stability; symmetric instability; baroclinic atmosphere