

文章编号: 2096-1618(2024)03-0369-05

具有能量临界增长的非线性薛定谔方程驻波的存在性

张越

(电子科技大学数学科学学院, 四川 成都 611731)

摘要: 提出一类具有能量临界增长的非线性薛定谔方程, 满足非线性项均为聚焦状态。通过解决一个在给定的条件下变分问题, 得到该类方程基态驻波解的存在性。结果表明, 当空间维数大于4时, 基态驻波解对于所有的正频率都是存在的。

关键词: 非线性薛定谔方程; 能量临界; 基态驻波; 变分问题; 存在性

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

doi: 10.16836/j.cnki.jcuit.2024.03.015

0 引言

本文提出一类具有能量临界增长且带柯西问题的非线性薛定谔方程:

$$\begin{cases} i\partial_t \psi = -\Delta \psi - \sum_{i=1}^m |\psi|^{p_i-1} \psi - |\psi|^{2^*-2} \psi \\ \psi(0, x) = \psi_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\psi = \psi(t, x)$ 是关于实变量 $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) 的复值函数, 这里 N 代表空间维数, $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位, Δ 是 Laplace 算子。此外在非线性项中, m 为整数满足 $m \geq 2$, 参数 p_i 两两互异且按升序排列并满足 $1 < p_i < 2^* - 1$, 其中 $2^* = \frac{2N}{N-2}$ 为 Sobolev 临界指数。同时, 当非线性项的符号为正时, 称为散焦状态; 当非线性项的符号为负时, 称为聚焦状态。该方程主要出现在量子力学领域, 可以描述非线性光学, 玻色气体的相互作用等物理现象^[1-3]。在数学上, 驻波解是一类具有时空分离形式 $\psi(t, x) = e^{i\omega t} \varphi_\omega(x)$ 的解, 其中 ω 代表驻波的频率, φ_ω 仅与空间变量 x 有关且满足以下椭圆方程:

$$-\Delta u + \omega u - \sum_{i=1}^m |u|^{p_i-1} u - |u|^{2^*-2} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (2)$$

特别地, 对该方程驻波存在性的研究有助于更深刻地理解在折射率依赖于波振幅的介质中的激光束的传播机制, 所以其存在性往往是对方程进行更深入研究的基础, 例如继续研究它的稳定性与不稳定性, 构造多孤子以及研究孤立子分解猜想等。众所周知, 方程(2)在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间中存在非平凡解的必要条件是 $\omega > 0$, 因为可以用 Pohozaev 恒等式验证当 $\omega \leq 0$ 时仅有零解。然而, 对于所有给定的空间维数 N 和参数 p_i ,

并非当 $\omega > 0$ 时非平凡解都存在。对于 $m = 1$ 的情况, Akahori 等^[4-5]证明了当 $N = 3$ 且 $3 < p_1 < 5$ 时, 方程(2)对于所有的 $\omega > 0$ 都存在非平凡解; 当 $N \geq 4$ 且 $1 + \frac{4}{N} < p_1 < 2^* - 1$ 时, 方程(2)对于所有的 $\omega > 0$ 都存在非平凡解。后来, Kikuchi 等^[6]证明了当 $N \geq 4$ 且 $p_1 = 1 + \frac{4}{N}$ 时, 方程(2)对于所有的 $\omega > 0$ 都存在非平凡解。

对于经典的非线性薛定谔方程对应的椭圆方程:

$$-\Delta u + \omega u - |u|^{p-1} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

Berestycki 等^[7]得到如下结果: 当 $N \geq 1$ 且 $1 < p < 2^* - 1$ 时, 方程(3)对于所有的 $\omega > 0$ 都存在非平凡解; 当 $N \geq 3$ 且 $p = 2^* - 1$ 时, 方程(3)只对 $\omega = 0$ 的情况才存在非平凡解。其次, 对于也被广泛研究的具有双非线性项的薛定谔方程对应的椭圆方程:

$$-\Delta u + \omega u - a|u|^{p-1} u - b|u|^{q-1} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (4)$$

其非平凡解的存在性跟 a, b 的符号密切相关^[7]。当 $a < 0$ 且 $b > 0$ 时, 方程(4)对于所有的 $\omega \geq 0$ 都存在非平凡解。然而 $\omega = 0$ 时的情况较为特殊, 因为此时驻波解在无穷远处是代数衰减的, 因此在低维空间时需要满足一定的条件才属于 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间^[8]。当 $a > 0$ 且 $b > 0$ 时, 方程(4)对于所有的 $\omega > 0$ 都存在非平凡解。当 $a > 0$ 且 $b < 0$ 时, 存在 $\omega^* > 0$ 使得方程(4)当 $0 < \omega < \omega^*$ 时才存在非平凡解。当 $a < 0$ 且 $b < 0$ 时, 方程(4)对任意的 $\omega \in \mathbb{R}$ 都不存在非平凡解。

为寻求所提出的非线性薛定谔方程的基态驻波解, 首先定义一个变分问题, 利用径向对称紧性原理^[9], 在合适的条件下解此变分问题, 便可得到基态驻波解的存在性。

1 预备知识

首先, Tao 等^[10]基于 Cazenave^[3]的方法证明了方

程(1)的柯西问题是局部适定的。即对任意的 $\psi_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, 方程(1)存在以 $\psi_0(x)$ 为初值且唯一的强解 $\psi \in C([0, T_{\max}), H^1(\mathbb{R}^N))$, 这里 T_{\max} 表示解的最大存在时间。此外, 对于任意的 $t \in [0, T_{\max})$, 解 ψ 满足能量和质量守恒:

$$E(\psi(t)) = E(\psi_0)$$

$$M(\psi(t)) = M(\psi_0)$$

能量和质量定义分别如下:

$$E(u) := \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i+1} \|u\|_{p_i+1}^{p_i+1} - \frac{1}{2^*} \|u\|_{2^*}^{2^*}$$

$$M(u) := \frac{1}{2} \|u\|_2^2$$

其次, 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间中对于 $\omega > 0$, 定义如下 Action 泛函:

$$A_\omega(u) := E(u) + \omega M(u)$$

由能量和质量的守恒律, 不难看出 Action 泛函关于时间 $t \in [0, T_{\max})$ 也是守恒的。同时定义如下 Nehari 泛函:

$$N_\omega(u) := \|\nabla u\|_2^2 + \omega \|u\|_2^2 - \sum_{i=1}^m \|u\|_{p_i+1}^{p_i+1} - \|u\|_{2^*}^{2^*}$$

并且注意到如果方程(2)存在驻波 φ_ω , 那么它满足 $N_\omega(\varphi_\omega) = 0$ 。现定义变分问题:

$$d(\omega) := \inf \{A_\omega(u) : u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, N_\omega(u) = 0\} \quad (5)$$

同时定义集合:

$$G_\omega := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : d(\omega) = A_\omega(u), N_\omega(u) = 0\}$$

根据类似的结果可知^[8,11]: 如果 G_ω 不空, 那么 $u \in G_\omega$ 满足方程(2), 并称为基态。由此可见基态对应的驻波是一种特殊的驻波, 能够最小化 Action 泛函 A_ω 。此外, 也称式(5)为基态的变分特征。

在方程(3)中取 $p = 2^*$, 那么知只有当 $\omega = 0$ 时才在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间中存在非平凡解, 并称该方程为 Lane-Emden 方程。那么对于 Sobolev 不等式:

$$\|u\|_{2^*} \leq C_N \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N), N \geq 3 \quad (6)$$

最佳常数 C_N 仅与空间维数 N 有关, 并且知等号可由 Talenti 函数^[12]

$$W_{\varepsilon,y}(x) := (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x-y|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}^N, \varepsilon > 0$$

取得, 并且该函数在不考虑 y 和 ε 的意义下是唯一正的径向对称衰减解。事实上, Talenti 函数也是 Lane-Emden 方程的基态解, 因此满足对应的变分特征。现定义对应的 Action 泛函和 Nehari 泛函如下:

$$A_0^*(u) := \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - \frac{1}{2^*} \|u\|_{2^*}^{2^*}$$

$$N_0^*(u) := \|\nabla u\|_2^2 - \|u\|_{2^*}^{2^*}$$

那么变分特征可表示为

$$d^*(0) := \inf \{A_0^*(u) : u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, N_0^*(u) = 0\} \quad (7)$$

注意到 $N_0^*(W_{\varepsilon,y}) = 0$, 那么有 $\|W_{\varepsilon,y}\|_{2^*}^{2^*} = \|\nabla W_{\varepsilon,y}\|_2^2 = C_N^{-N}$, $d^*(0) = (NC_N^N)^{-1}$ 。因为 Talenti 函数在无穷远处是代数衰减的, 不难看出 $W_{\varepsilon,y}(x) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ 当且仅当 $N \geq 5$, 因此当 $N = 4$ 时需定义一个截断函数。令截断函数 $\chi(x)$ 满足 $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 并且成立

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |x| \leq 1, \\ \vartheta(x), & 1 < |x| < 2, \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$$

这里 $\vartheta(x)$ 满足 $0 \leq \vartheta(x) \leq 1$ 。现定义函数列 $\{w_n\}$ 满足

$$w_n = \begin{cases} \chi(x) W_{n^{-1},0}(x), & N = 4 \\ W_{n^{-1},0}(x), & N \geq 5 \end{cases}$$

那么根据文献[4-6]的结果, 有估计

$$\|\nabla w_n\|_2^2 = C_N^{-N} + O(n^{2-N})$$

$$\|w_n\|_{2^*}^{2^*} = C_N^{-N} + O(n^{-N})$$

$$\|w_n\|_2^2 = \begin{cases} C_1 n^{-2} \ln n + O(n^{-2}), & N = 4 \\ C_1 n^{-2} + O(n^{2-N}), & N \geq 5 \end{cases}$$

$$\|w_n\|_{p+1}^{p+1} = C_2 n^{\frac{(N-2)(p+1)}{2} - N} + O(n^{\frac{(N-2)(p+1)}{2}})$$

这里 C_1 和 C_2 是与 n 无关的正常数。该估计的阶对基态解的存在性起着至关重要的作用。

2 主要结果

为解决变分问题(5)以及方便讨论, 首先定义泛函

$$\begin{aligned} R_\omega(u) &:= A_\omega(u) - \frac{1}{p_i+1} N_\omega(u) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_i+1} \right) \left(\|\nabla u\|_2^2 + \omega \|u\|_2^2 \right) + \sum_{i=2}^m \left(\frac{1}{p_i+1} - \frac{1}{p_i+1} \right) \|u\|_{p_i+1}^{p_i+1} + \left(\frac{1}{p_i+1} - \frac{1}{2^*} \right) \|u\|_{2^*}^{2^*} \end{aligned}$$

那么 $d(\omega)$ 可被重写为

$$d(\omega) = \inf \{R_\omega(u) : u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, N_\omega(u) = 0\}$$

引理 1 令 $N \geq 4$ 且 $1 < p_i < 2^* - 1$ 。那么对于每个 $\omega > 0$, 有 $d(\omega) > 0$ 。

证明 设 $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ 满足 $N_\omega(u) = 0$ 。由加法形式的 Gagliardo-Nirenberg 不等式^[8]

$\|v\|_{p+1}^{p+1} \leq C_1 \|\nabla v\|_2^{p+1} + C_2 \|v\|_{2^*}^{p+1}$, $\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 以及 Sobolev 不等式(6), 有

$$\|\nabla u\|_2^2 + \omega \|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \|u\|_{p_i+1}^{p_i+1} + \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ \leq \sum_{i=1}^m (C_{1,i} \|\nabla u\|_2^{p_i+1} + C_{2,i} \|u\|_2^{p_i+1}) + C_N^{2^*} \|\nabla u\|_2^{2^*}$$

那么上式等价于

$$(\omega \|u\|_2^2 - \sum_{i=1}^m C_{2,i} \|u\|_2^{p_i+1}) + (\|\nabla u\|_2^2 - \sum_{i=1}^m C_{1,i} \|\nabla u\|_2^{p_i+1} - C_N^{2^*} \|\nabla u\|_2^{2^*}) \leq 0 \quad (8)$$

因此,可以得出在式(8)中的两项至少有一项非正。具体地说,若第一项非正,那么由 $p_i+1>2$ 可知 $\|u\|_2$ 不会充分小,否则一定会使得第一项为正;同理,若第二项非正,可知 $\|\nabla u\|_2$ 不会充分小。换句话说,即存在正常数 m_1 和 m_2 使得 $\|u\|_2 \geq m_1$ 或者 $\|\nabla u\|_2 \geq m_2$ 。所以根据 $R_\omega(u)$ 的定义,得到

$$R_\omega(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1+1}\right) (\|\nabla u\|_2^2 + \omega \|u\|_2^2) + \sum_{i=2}^m \left(\frac{1}{p_i+1} - \frac{1}{2^*}\right) \|u\|_{p_i+1}^{p_i+1} + \left(\frac{1}{p_1+1} - \frac{1}{2^*}\right) \|u\|_{2^*}^{2^*} \\ \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1+1}\right) (\|\nabla u\|_2^2 + \omega \|u\|_2^2) \\ \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1+1}\right) \min(m_2^2 + \omega m_1^2) > 0$$

最后由 $d(\omega)$ 的定义即可得出结论。证毕。

相似地,关于 Lane-Emden 方程,定义泛函

$$R_0^*(u) := A_0^*(u) - \frac{1}{2} N_0^*(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \|u\|_{2^*}^{2^*}$$

那么 $d^*(0)$ 可被重写为

$$d^*(0) = \inf\{R_0^*(u) : u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, N_0^*(u) = 0\} \quad (9)$$

引理2 令 $N \geq 4$ 且 $1 < p_i < 2^*-1$, 那么有

$$d^*(0) = \inf\{R_0^*(u) : u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, N_0^*(u) \leq 0\}$$

证明 对于 $N_0^*(u) = 0$ 的情况,该变分问题就是式(7)。对于 $N_0^*(u) < 0$ 的情况,存在 $\lambda \in (0, 1)$ 使 $N_0^*(\lambda u) = 0$ 。由式(9)知成立

$$d^*(0) \leq A_0^*(\lambda u) = \frac{1}{2} N_0^*(\lambda u) + R_0^*(\lambda u) = R_0^*(\lambda u) < R_0^*(u)$$

证毕。

注 对于 $d(\omega)$,事实上也存在相似的结论,即

$$d(\omega) = \inf\{R_\omega(u) : u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, N_\omega(u) \leq 0\} \quad (10)$$

其证明过程与引理2相同。

根据 Akahori 等^[4]的结果知在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间中存在径向对称的函数列 $\{v_n\}$ 使 $N_\omega(v_n) \rightarrow 0$ 且 $R_\omega(v_n) \rightarrow d(\omega)$ 。那么存在常数 $N_0 > 0$ 使得当 $n > N_0$ 时,有

$$R_\omega(v_n) \leq d(\omega) + 1$$

所以由 $R_\omega(u)$ 的定义知 $\{v_n\}$ 是有界的。因此存在仍然记为 $\{v_n\}$ 的子列以及 $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ 使当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $v_n \rightarrow v_0$ (弱)。由径向对称紧性原理^[9],得到在 $L^{p_i+1}(\mathbb{R}^N)$ 空间中当 $n \rightarrow \infty$ 时 $v_n \rightarrow v_0$ (强)以及 $v_n \rightarrow v_0$ (几乎处处)。

注 之后的引理将继续使用该函数列 $\{v_n\}$ 。

引理3 令 $N \geq 4$ 且 $1 < p_i < 2^*-1$ 。如果对于某个 $\omega > 0$ 不存在非平凡的 v_0 , 那么有 $d(\omega) \geq (NC_N^N)^{-1}$ 。

证明 因为 $v_0 = 0$ 且 $\{v_n\}$ 是关于 $d(\omega)$ 的极小函数列,那么由 $N_\omega(v_n) \rightarrow 0$ 以及在 $L^{p_i+1}(\mathbb{R}^N)$ 空间中 $v_n \rightarrow 0$ (强),有当 $n \rightarrow \infty$ 时成立

$$\|\nabla v_n\|_2^2 - \|v_n\|_{2^*}^{2^*} \rightarrow -\omega \|v_n\|_2^2$$

即存在子列 $\{v_{n_j}\}$ 使当 $j \rightarrow \infty$ 时成立 $N_0^*(v_{n_j}) \leq 0$ 。那么由引理2得到

$$d^*(0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} R_0^*(v_{n_j}) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \|v_{n_j}\|_{2^*}^{2^*}$$

注意到当 $n \rightarrow \infty$ 时 $R_\omega(v_n) \rightarrow d(\omega)$, 因此有

$$d(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_\omega(v_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} R_\omega(v_{n_j}) \\ \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \|v_{n_j}\|_{2^*}^{2^*} \\ \geq d^*(0) = (NC_N^N)^{-1}$$

证毕。

现介绍 Brézis-Lieb 引理^[13],它将被用于证明基态的存在性。

引理4 令 $1 \leq r < \infty$ 且 $\{u_n\}$ 是 $L^r(\mathbb{R}^N)$ 空间中的有界列并满足当 $n \rightarrow \infty$ 时 $u_n \rightarrow u$ (几乎处处)。那么成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|_r^r - \|u_n - u\|_r^r) = \|u\|_r^r$$

引理5 令 $N \geq 4$ 且 $1 < p_i < 2^*-1$ 。如果对于某个 $\omega > 0$ 成立 $0 < d(\omega) < (NC_N^N)^{-1}$, 那么至少存在一个非零的 v_0 使在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间中当 $n \rightarrow \infty$ 时 $v_n \rightarrow v_0$ (强)。

证明 首先,由引理1知 $d(\omega) > 0$ 。其次,由引理3知如果 $v_0 = 0$, 那么与题设条件 $0 < d(\omega) < (NC_N^N)^{-1}$ 矛盾。现由引理4得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (N_\omega(v_n) - N_\omega(v_n - v_0)) = N_\omega(v_0) \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_\omega(v_n) - R_\omega(v_n - v_0)) = R_\omega(v_0) \quad (12)$$

注意到 $R_\omega(v_0) > 0$, 那么由式(12),得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_\omega(v_n - v_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_\omega(v_n) - R_\omega(v_0) < \lim_{n \rightarrow \infty} R_\omega(v_n) = d(\omega)$$

表明存在 $N_0 > 0$ 使对所有的 $n > N_0$ 成立 $R_\omega(v_n - v_0) < d(\omega)$ 。因此根据引理2的注,得到对所有的 $n > N_0$ 成立 $N_\omega(v_n - v_0) > 0$ 。此外,因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} N_\omega(v_n) = 0$, 那么由式(11)得到

$$N_\omega(v_0) = -\lim_{n \rightarrow \infty} N_\omega(v_n - v_0) \leq 0$$

再根据引理2的注以及范数的弱下半连续性,得到

$$d(\omega) \leq R_\omega(v_0) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R_\omega(v_n) = d(\omega)$$

与式(12)结合即可推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_\omega(v_n - v_0) = 0$$

因此,由 R_ω 的定义,可以看出在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 空间中当 $n \rightarrow \infty$ 时 $v_n \rightarrow v_0$ (强)并且有 $d(\omega) = A_\omega(v_0)$, 证毕。

最后是关于基态存在性的主要定理,该方法主要参考文献[4]。

定理6 令 $N \geq 4$ 且 $1 < p_i < 2^* - 1$ 。那么对于每个 $\omega > 0$, 方程(1)至少存在一个基态。

证明 利用在第一节中定义的函数列 $\{w_n\}$, 容易看出对于充分大的 n , 存在唯一的 $\lambda_{\omega,n} > 0$ 使 $N_\omega(\lambda_{\omega,n} w_n) = 0$ 。

注意到 $-2 < \frac{(N-2)(p_i+1)}{2} - N < 0$, 那么 $N_\omega(\lambda_{\omega,n} w_n) = 0$

等价于

$$\lambda_{\omega,n}^2 = 1 - \lambda_{\omega,n}^{p_m-1} C_N^N C_2 n^{\frac{(N-2)(p_m+1)}{2} - N} + O(n^{\frac{(N-2)(p_{m-1}+1)}{2} - N})$$

其中 p_m 为所有 p_i 中的最大者。不难看出对于充分大的 n , 有 $\lambda_{\omega,n} < 1$ 且满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\omega,n} = 1$ 。

现取 $\mu_{\omega,n} = 1 - \lambda_{\omega,n}$, 那么根据泰勒公式 $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$, 代入得到

$$1 - 2\mu_{\omega,n} + O(\mu_{\omega,n}^2) = 1 - C_N^N C_2 (1 - (p_m - 1)\mu_{\omega,n} + O(\mu_{\omega,n}^2)) n^{\frac{(N-2)(p_m+1)}{2} - N} + O(n^{\frac{(N-2)(p_{m-1}+1)}{2} - N})$$

化简后即得

$$\mu_{\omega,n} = \begin{cases} C_2' n^{\frac{(N-2)(p_m+1)}{2} - N} + O(n^{\frac{(N-2)(p_{m-1}+1)}{2} - N}), & 2p_m - p_{m-1} \leq 2^* - 1 \\ C_2' n^{\frac{(N-2)(p_m+1)}{2} - N} + O(n^{(N-2)(p_m+1)-2N}), & 2p_m - p_{m-1} > 2^* - 1 \end{cases}$$

其中 C_2' 是与 n 无关的正常数。因此,再由 $\lambda_{\omega,n} = 1 - \mu_{\omega,n}$ 以及泰勒公式可以得到

$$R_\omega(\lambda_{\omega,n} w_n) =$$

$$\begin{cases} (NC_N^N)^{-1} - C_2' n^{\frac{(N-2)(p_m+1)}{2} - N} + O(n^{\frac{(N-2)(p_{m-1}+1)}{2} - N}), & 2p_m - p_{m-1} \leq 2^* - 1 \\ (NC_N^N)^{-1} - C_2' n^{\frac{(N-2)(p_m+1)}{2} - N} + O(n^{(N-2)(p_m+1)-2N}), & 2p_m - p_{m-1} > 2^* - 1 \end{cases}$$

其中 C_2' 是与 n 无关的正常数。那么存在常数 $N_0 = N_0(N, p_m, p_{m-1}, \omega) > 0$ 使对所有的 $n > N_0$ 成立 $R_\omega(\lambda_{\omega,n} w_n) < (NC_N^N)^{-1}$ 。因此由 $d(\omega)$ 的定义以及 $N_\omega(\lambda_{\omega,n} w_n) = 0$, 可取任意固定的 $n > N_0$ 使对每个 $\omega > 0$ 成立

$$d(\omega) \leq R_\omega(\lambda_{\omega,n} w_n) < (NC_N^N)^{-1}$$

最后由引理5可知基态存在。证毕。

3 结束语

通过求解所定义的变分问题(5),得到当空间维

数 $N \geq 4$ 时,方程(1)所有正频率的基态驻波解都是存在的,其本质是将证明基态驻波存在性的问题转化为证明 $d(\omega)$ 取值范围的问题。之所以可以这样转化,是因为能量临界增长项 $|\psi|^{2^*-2}\psi$ 的特殊性,它可将方程(1)与 Lane-Emden 方程相联系,其中 Talenti 函数的变分特征(7)起了决定性作用。作为比较, Zhang 等^[14]证明了当 $m=1$ 时,方程(1)也有相同的结果,因此本文的结论可作为一个延展。另外,当空间维数 $N=3$ 时,虽然 Talenti 函数同样可以被截断,但截断函数 $\chi(x)$ 的阶变得更加复杂。特别地,当所有的 p_i 满足 $1 < p_i \leq 3$ 时,本文所用的方法失效,因此还不清楚方程(1)所有正频率的基态驻波解是否都是存在的。

参考文献:

- [1] Kelley P L. Self-Focusing of Optical Beams [J]. Physical Review Letters, 2009, 15(26): 1005-1008.
- [2] Sulem C, Sulem P L. The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse [M]. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] Cazenave T. Semilinear Schrödinger equations, Courant Lecture Notes in Mathematics [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.
- [4] Akahori T, Ibrahim S, Kikuchi H, et al. Existence of a ground state and blow-up problem for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth [J]. Differential and Integral Equations, 2012, 25(3-4): 383-402.
- [5] Akahori T, Ibrahim S, Kikuchi H, et al. Global dynamics above the ground state energy for the combined power-type nonlinear Schrödinger equations with energy-critical growth at low frequencies [M]. American Mathematical Society, 2021.
- [6] Kikuchi H, Watanabe M. Existence of a ground state and blowup problem for a class of nonlinear Schrödinger equations involving mass and energy critical exponents [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 2020, 27(6): 56.
- [7] Berestycki H, Lions P L. Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1983, 82(4): 313-345.
- [8] Fukaya N, Hayashi M. Instability of algebraic standing waves for nonlinear Schrödinger equations

- with double power nonlinearities[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2021, 374(2):1421–1447.
- [9] Strauss W A. Existence of solitary waves in higher dimensions[J]. Communications in Mathematical Physics, 1977, 55(2):149–162.
- [10] Tao T, Visan M, Zhang X Y. The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2007, 32(8):1281–1343.
- [11] Ohta M, Yamaguchi T. Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity[J]. SUT Journal of Mathematics, 2015, 51(1):49–58.
- [12] Talenti G. Best constant in Sobolev inequality[J]. Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 1976, 110(1):353–372.
- [13] Brézis H, Lieb E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1983, 88(3):486–490.
- [14] Zhang Y, Zhang J. Instability of standing waves for the nonlinear Schrödinger equation with energy critical growth[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2022.

Existence of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation with Energy Critical Growth

ZHANG Yue

(School of Mathematical Sciences, UESTC, Chengdu 611731, China)

Abstract: Firstly, a class of nonlinear Schrödinger equation with energy critical growth is proposed in this paper, which meets the condition that the nonlinear terms are all focusing. Next, by solving a variational problem under given conditions, the existence of the ground state standing wave solution of this kind of equation is verified. The results show that the ground state standing wave solution exists for all positive frequencies when the dimension of space is not less than four.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation; energy critical growth; ground state standing wave; variational problem; existence