文章编号: 2096-1618(2024)03-0382-07

基于有限 Zak 变换的零相关区序列集构造

刘珍珍， 李旭东
(西华大学理学院,四川 成都 610039)

摘要:针对 Brodzik 在 2011 年和 2013 年文中的完备序列和零相关区序列构造中参数的限制问题,分别提出完备序列和零相关区序列的新构造方法。首先,基于有限 Zak 变换,提出没有“参数为奇素数”限制的完备序列构造结构,并且用同余理论论证。其次,提出一种具有稀疏性、结构化特点的 $L\times KL$ 的零相关区序列集的 Zak 空间结构,从而得到零相关区序列集,用有限 Zak 变换和同余理论论证。相比 Brodzik 2013 年文中的零相关区序列集,新构造的零相关区序列集的零相关区的长度更长,序列的数量更多。

关 键 词:应用数学;数学与通信;有限 Zak 变换;完备序列;零相关区;零互相关区序列集
中图分类号:O174 **文献标志码**:A
doi:10.16836/j.cnki.jcuit.2024.03.017

0 引言

20 世纪 50 年代,Golay 在多光谱的研究中首次提出格雷互补对(golay complementary pair, GCP)的概念[1-2]。GCP 被广泛应用在现代通信系统、雷达和图像处理等多个领域[3-6]。70 年代,为更广泛将 GCP 应用于实际问题中, Tseng 等[7]将 GCP 的概念推广到二元互补序列集(complementary sequence set, CSS);1978 年,Sivaswamy[8]进一步将 GCP 的概念推广到多相互补序列集。随着深入研究发现,由于互补序列集的集合大小是有限的,导致其在实际应用中并不能满足大量用户同时使用。为改进此缺陷,2007 年,Fan 等[9]利用零相关区(zero correlation zone, ZCZ)的概念构造了一种在一定范围内具有理想的自相关和互相关特性的 Z 互补序列(Z-complementary set, ZCS)集,构造的 ZCS 集合的大小和长度更加灵活。Tang 等[10]证明了互补序列集的零相关区长度 Z_{cz}的理论界:设序列集的大小为 M,序列的长度为 N,则有 $M\cdot Z_{cz}\leqslant N$[10]。

针对 Z 互补序列集的构造方法的研究从未中断。2018 年,Adhikary 等[11-12]先后基于 GCP 构造了近似最优的偶数长度的 Z 互补对和最优的奇数长度的 Z 互补对。Adhikary 先利用 Turyn 的方法[13]生成长度为 $2^{\alpha}\ 10^{\beta}\ 26^{\gamma}$ 的二元 GCP,通过二元 GCP 的插入形式构造了长度为 $2^{\alpha}\ 10^{\beta}\ 26^{\gamma}+1$ 的最优奇数长度的 Z 互补对[12]。2019 年,Yang 等[14]在 Golay 互补对的基础上提出了序列长度为 $8N+4$,$N=2^{\alpha}\ 10^{\beta}\ 26^{\gamma}$,ZCZ 宽度为 $5N+2$ 的 Z 互补序列集。2021 年,Xie 等[15]通过相互正交的序列构造了具有大集合的二进制 Z 互补序列集。2022 年,Yu 等[16]在已有的 Z 互补序列集和完全互补集基础上利用 Kronecker 积提出了一类新的最优 Z 互补码。这些构造方法有各自的优点,但都不是直接构造方法,均是在构造的开始阶段使用了具有某些性质的序列。现在也存在一些直接构造 Z 互补对的方法。2017 年,Chen[17]首次使用广义布尔函数直接构造二元偶数长度的 Z 互补对,不仅能够构造奇数长度的的 Z 互补对,也能构造偶数长度的 Z 互补对,能够灵活的调整零相关区的长度和序列长度。2018 年,Wu 等[18]基于广义布尔函数提出了一种 Z 互补序列集的直接构造方法,它构造的 Z 互补序列集合达到了集合大小的理论上界,所构造的 Z 互序列集的参数也非常灵活。

有限的 Zak 变换可以认为是离散傅里叶变换的推广,具备离散傅里叶变换的一般性质,同时还具备特有的稀疏性质,能够降低计算序列相关性的难度。1967 年,Zak[19]首次将序列的分析、构造引入 Zak 空间中,并给出了 Zak 变换的具体定义。2011 年, Brodzik[20]解决了 chirp 信号在 Zak 空间的稀疏表示问题。2013 年,Brodzik[21]基于有限 Zak 变化,利用稀疏的、高度结构化的 FZT,构造了 ZCZ 序列集。2020 年,宗原[22]基于有限 Zak 变换设计了一种构造 ZCZ 序列集的新方法,ZCZ 序列集中序列数量和长度均与文献[21]相同,但能满足 Tang 提出的零相关区理论界[10],使结果达到最优。

基于上述叙述,本文首先对序列的 FZT 进行构

收稿日期:2023-01-08
基金项目:国家自然科学基金资助项目(62171387)

造，提出新的构造完备序列集的方法。此构造方法克服了 L 的奇偶性限制，增加了完备序列长度的多样性。随后利用有限 Zak 变换提出了一种直接构造 ZCZ 序列集的方法，对于 $L\times KL$ 的 FZT，构造的 ZCZ 序列集零相关区长度更长，序列数量更多。

1 预备知识

1.1 序列的相关概念

定义 1 设复值序列 $\boldsymbol{s}=(s(0),s(1),\cdots,s(N-1))=\{s(t)\}_{t=0}^{N-1}$，若 $|s_i(t)|=1$，则称这个序列 $\boldsymbol{s}$ 为多相序列。

定义 2 设 $\boldsymbol{u}=(u(0),u(1),u(2),\cdots,u(N-1))$ 和 $\boldsymbol{v}=(v(0),v(1),v(2),\cdots,v(N-1))$ 是两个复数域上的序列，它们的周期相关函数定义为

$$R_{u,v}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}u(t)\boldsymbol{v}^*(t+\tau),\quad 0\leqslant\tau<N \tag{1}$$

式中，$t+\tau$ 中的加法是模 N 的加法，$\boldsymbol{v}^*$ 表示 $\boldsymbol{v}$ 的共轭复数。当 $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{v}$ 时，$R_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}(\tau)$ 称为周期互相关函数；当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ 时，$R_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}}(\tau)$ 称为周期自相关函数，简写为 $R_{\boldsymbol{u}}(\tau)$。若对于 $0<\tau<N$，都有 $R_{\boldsymbol{u}}(\tau)=0$，则称序列 $\boldsymbol{u}$ 为完备序列。

定义 3 设 $\boldsymbol{S}$ 表示包含 M 个周期为 N 的序列集，记为 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_{M-1}\}$，其中 $\boldsymbol{s}_i=(s_i(0),s_i(1),\cdots,s_i(N-1))=\{s_i(t)\}_{t=0}^{N-1}$，$0\leqslant i\leqslant M-1$，可定义该序列集 $\boldsymbol{S}$ 的零相关区长度 Z_{cz}：

$$Z_{cz}=\max\{T\mid R_{s_i,s_j}(\tau)=0,\text{其中}(0\leqslant\tau<T\text{ 且 }i\neq j)\text{或}(0<\tau<T\text{且 }i=j)\} \tag{2}$$

若 S 的零相关区长度 $Z_{cz}\geqslant 1$，则称 $\boldsymbol{S}$ 为一个 (N,M,Z_{cz})-ZCZ 的零相关区序列集。当 $Z_{cz}=N$ 时，零相关区序列集就退化为完备序列集。

下面介绍 ZCZ 序列集的参数之间存在的关系。

引理 1（Tang-Fan-Matsufuji Bound [10]）设零相关区序列集 $\boldsymbol{S}$ 由 M 个周期为 N 的序列组成，且 $\boldsymbol{S}$ 的零相关区长度为 Z_{cz}，则有

$$M\cdot Z_{cz}\leqslant N \tag{3}$$

若 $\boldsymbol{S}$ 的零相关区长度为 $Z_{cz}=\dfrac{N}{M}$，则称 $\boldsymbol{S}$ 为满足 Tang-Fan-Matsufuji Bound 的最优的序列集。

1.2 有限 Zak 变换的概念及其性质

定义 4（离散傅里叶变换[21]）若 $\boldsymbol{x}=(x(0),x(1),x(2),\cdots,x(N-1))$ 是一个长度为 N 的复值序列，则 $\boldsymbol{x}$ 的离散傅里叶变换（DFT）：

$$X(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e_N(nm),\quad 0\leqslant m<N \tag{4}$$

式中，$e_N(n)=e^{2\pi in/N}$，i 表示虚数单位。

定义 5（有限 Zak 变换[21]）设序列 $\boldsymbol{x}=(x(0),x(1),x(2),\cdots,x(N-1))$ 的长度为 $N=LM$，其中 L 和 M 均为正整数。令 $n=k+rM$，$m=j+sL$，$0\leqslant k,s<M$，$0\leqslant r,j<L$，当 $m=j+0L$ 时，式(4)中的 $X(m)$ 变为

$$X(j)=\sum_{k=0}^{M-1}e_N(jk)\sum_{r=0}^{L-1}x(k+rM)e_L(rj) \tag{5}$$

式中的项内的和定义为有限 Zak 变换（FZT），即

$$X_L(j,k)=\sum_{r=0}^{L-1}x(k+rM)e_L(rj) \tag{6}$$

FZT 与 DFT 类似，也是一一映射，且序列 $\boldsymbol{x}$ 能通过它的 FZT 的逆变换得到，即

$$x(k+rM)=L^{-1}\sum_{j=0}^{L-1}X_L(j,k)e_L(-rj) \tag{7}$$

定义 6（相关函数[21]）设 $\boldsymbol{x}=(x(0),x(1),\cdots,x(N-1))$ 和 $\boldsymbol{y}=(y(0),y(1),\cdots,y(N-1))$ 是两个长度为 N 的多相序列，它们的相关函数可以表示为

$$z(n)=(\boldsymbol{y}\odot\boldsymbol{x})_n=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}y(m)x^*(m-n),\quad 0\leqslant n<N \tag{8}$$

式中，$m-n$ 中的运算需要取模 N 运算，且当 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ 时，$z(n)$ 被称为自相关函数。

引理 2 设 $\boldsymbol{X}_L$，$\boldsymbol{Y}_L$ 和 $\boldsymbol{Z}_L$ 分别表示 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 和 z 的 FZT，则相关函数 z 的 FZT 为

$$\boldsymbol{Z}_L(j,k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{M-1}\boldsymbol{Y}_L(j,l)\boldsymbol{X}_L^*(j,l-k) \tag{9}$$

2 完备序列和 ZCZ 序列的构造

完备序列是特殊的 ZCZ 序列，本节分别给出完备序列和 ZCZ 序列的构造。

定理 1 设多相序列 $\boldsymbol{x}_a$ 是长度为 $N=L\times L$ 的周期序列，$1\leqslant a\leqslant L-1$，$L\in Z^+$，若 $\boldsymbol{x}_a$ 的有限 Zak 变换 $X_L^{(a)}$ 满足

$$|X_L^{(a)}(j,k)|=\begin{cases}L, & ak+j\equiv 0(\mathrm{mod}L)\\ 0, & \text{else}\end{cases} \tag{10}$$

式中 $0\leqslant k,j\leqslant L-1$。则当 L 为奇素数时，序列 $\boldsymbol{x}_a$ 均为完备序列；当 L 不是奇素数时，对于满足 $\gcd(a,L)=1$ 的 $\boldsymbol{x}_a$ 为完备序列。

证明 当 L 不是奇素数时，对满足 $\gcd(a,L)=1$ 的 $\boldsymbol{x}_a$ 进行分析。对于固定的 a、j，由 $\gcd(a,L)=1$ 可知，$\gcd(a,L)\mid(-j)$，根据同余式有解的充分必要条件可知，关于未知元 k 的一元同余式 $ak+j\equiv 0(\mathrm{mod}L)$ 有解，且解的个数 1，即由 $ak+j\equiv 0(\mathrm{mod}L)$ 确定 j 与 k 一一对应，从而可知 $X_L(j,k)$ 在每一行有且只有一个非零值。

根据引理 2 可知,$\boldsymbol{x}_a$ 的自相关函数的 FZT:

$$Z_L^{(a)}(j,k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{L-1}X_L^{(a)}(j,l)\left[X_L^{(a)}(j,l-k)\right]^*$$

$$=\frac{1}{N}\{X_L^{(a)}(j,0)\left[X_L^{(a)}(j,0-k)\right]^*+\cdots+X_L^{(a)}(j,L-1)\left[X_L^{(a)}(j,L-1-k)\right]^*\}$$

$$=\begin{cases}1,k=0,\\0,\text{else}\end{cases}$$

由式(7)可得自相关函数 $Z_L^{(a)}(j,k)$ 的逆变换 $z^{(a)}(k+rL)$ 为

$$z^{(a)}(k+rL)=L^{-1}\sum_{j=0}^{L-1}Z_L^{(a)}(j,k)e_L(-rj)$$

$$=L^{-1}\left[Z_L^{(a)}(0,k)e_L(0)+Z_L^{(a)}(1,k)e_L(-r)+\cdots+Z_L^{(a)}(L-1,k)e_L(-r(L-1))\right]$$

$$=\begin{cases}L^{-1}\left[e_L(0)+e_L(-r)+\cdots+e_L(-r(L-1))\right], & k=0\\0, & \text{else}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}L^{-1}\left[e_L^r(0)+e_L^r(-1)+\cdots+e_L^r(1-L)\right], & k=0\\0, & \text{else}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & k=0,r=0\\0, & \text{else}\end{cases}$$

可以看出,当 $k=0,r=0$ 时,$z^{(a)}(k+rL)$ 非零;当 $0<k,r\leqslant L-1$时,自相关序列值 $z^{(a)}(k+rL)=0$,故 $\boldsymbol{x}_a$ 构成完备序列。

注:定理 1 中的序列长度结构为 $L\times L$,当 L 为奇素数时,产生的 $L-1$ 个序列均为完备序列,这与文献[20]中的推论 13 的内容相似。但是,定理 1 中的后部分内容就没有"L 为奇素数"的限制,即在 L 不是奇素数情况下,$1\leqslant a\leqslant L-1$,只要满足 $\gcd(a,L)=1$,就可以根据定理 1 构造出完备序列。

为更好地理解定理 1,给出下列例子。

例 1 设 $L=5$,试根据定理 1,构造出 4 个长度 $N=5\times5$ 的完备序列。

解 设多相序列 $\boldsymbol{x}_a$ 的长度 $N=5\times5,0\leqslant j,k,r\leqslant4,1\leqslant a\leqslant4$。根据定理 1 可得,完备序列 $\boldsymbol{x}_a$ 的有限 Zak 变换 $\boldsymbol{X}_L$ 为

$$X_L^{(1)}=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&0&0&0&5\\0&0&0&5&0\\0&0&5&0&0\\0&5&0&0&0\end{bmatrix},X_L^{(2)}=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&0&5&0&0\\0&0&0&0&5\\0&5&0&0&0\\0&0&0&5&0\end{bmatrix},$$

$$X_L^{(3)}=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&0&0&5&0\\0&5&0&0&0\\0&0&0&0&5\\0&0&5&0&0\end{bmatrix},X_L^{(4)}=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&5&0&0\\0&0&0&5&0\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}$$

序列 $\boldsymbol{x}_a$ 的自相关函数的有限 Zak 变换 $Z_L^{(a)}$ 为

$$Z_L^{(a)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

式中,$a=1,2,3,4$。根据式(7)可得,$Z_L^{(a)}$ 的有限 Zak 逆变换 $z^{(a)}$ 为

$$\boldsymbol{z}^{(a)}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

这从时域上表明 $\boldsymbol{x}_a$ 是完备序列。比如由 $X_L^{(4)}$ 可以得完备序列 $\boldsymbol{x}_4$,即

$$\boldsymbol{x}_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&e_L(-1)&e_L(-2)&e_L(-3)&e_L(-4)\\1&e_L(-2)&e_L(-4)&e_L(-1)&e_L(-3)\\1&e_L(-3)&e_L(-1)&e_L(-4)&e_L(-2)\\1&e_L(-4)&e_L(-3)&e_L(-2)&e_L(-1)\end{bmatrix}$$

类似地可以得到完备序列 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$。

定理 2 设多相序列 x_1 和 x_a,它们都是长度为 $N=L\times KL$ 的周期序列,$2\leqslant a\leqslant L,K,L\in Z^+$,若序列 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_a$ 的有限 Zak 变换满足

$$|X_L^{(1)}(j,k)|=\begin{cases}L, & k+j\equiv0(\mathrm{mod}L)\\0, & \text{else}\end{cases}$$

$$X_L^{(a)}(j,k)=X_L^{(1)}(\left[(j+a-1)\right]_L,k)\tag{10}$$

式中,$0\leqslant j\leqslant L-1,0\leqslant k\leqslant KL-1,\left[(j+a-1)\right]_L$ 表示 $(j+a-1)$ 取模 L 运算。则当 $K=1$ 时,$\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_a(2\leqslant a\leqslant L)$ 均为完备序列;当 $K\geqslant2$ 时,$\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_a$ 构成 ZCZ 序列集。

证明(1) 首先证序列集的自相关情况

对于固定的 j 和未知元为 k 的一元同余式 $k+j\equiv0(\mathrm{mod}L)$,由 $\gcd(1,L)=1$ 可知,$\gcd(1,L)\mid(-j)$,根据同余式有解的充分必要条件可知,同余式 $k+j\equiv0(\mathrm{mod}L)$ 有解,且解的个数 1,即由 $k+j\equiv0(\mathrm{mod}L)$ 确定在 $0\leqslant j,k\leqslant L-1$ 范围内 j 与 k 一一对应,从而可知 $X_L(j,k)$ 在 $0\leqslant k\leqslant L-1$ 范围内,每一行有且只有一个非零值;同理,由 $k+j\equiv0(\mathrm{mod}L)$ 确定在 $(K-1)L\leqslant k\leqslant KL-1(K\geqslant2)$ 时 j 与 k 也是一一对应的,从而可知 $X_L^{(1)}(j,k)$ 在 $(K-1)L\leqslant k\leqslant KL-1$ 时,每一行有且仅有一个非零值。综上所述,在 $0\leqslant k\leqslant KL-1$ 时,$X_L^{(1)}(j,k)$ 每行有 K 个非零值,且非零值之间的距离为 L。

$\boldsymbol{x}_1$ 的自相函数的有限 Zak 变换 $Z_L^{(1)}(j,k)$ 为

$$Z_L^{(1)}(j,k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{KL-1}X_L^{(1)}(j,l)\left[X_L^{(1)}(j,l-k)\right]^*$$
$$=\frac{1}{N}\{X_L^{(1)}(j,0)\left[X_L^{(1)}(j,0-k)\right]^*+\cdots+X_L^{(1)}(j,KL-1)\left[X_L^{(1)}(j,KL-1-k)\right]^*\}$$
$$=\begin{cases}1, & k=qL,q=0,1,\cdots,K-1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$Z_L^{(1)}(j,k)$有限 Zak 变换的逆变换 $z^{(1)}(k+rL)$为

$$z^{(1)}(k+rL)=L^{-1}\sum_{j=0}^{L-1}Z_L^{(1)}(j,k)e_L(-rj)$$
$$=L^{-1}\left[Z_L^{(1)}(0,k)e_L(-r\cdot 0)+Z_L^{(1)}(1,k)e_L(-r)+\cdots+Z_L^{(1)}(L-1,k)e_L(-r(L-1))\right]$$
$$=\begin{cases}L^{-1}\left[e_L(0)+e_L(-r)+\cdots+e_L(-r(L-1))\right], & \\ \qquad k=qL,q=0,1,\cdots,K-1 & \\ 0, \quad \text{else} & \end{cases}$$
$$=\begin{cases}L^{-1}\left[e_L^r(0)+e_L^r(-1)+\cdots+e_L^r(1-L)\right], & \\ \qquad k=qL,q=0,1,\cdots,K-1 & \\ 0, \quad \text{else} & \end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & k=qL,q=0,1,\cdots,K-1,r=0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

显然，$z^{(1)}(k+rL)$对于 $0\leqslant j,r\leqslant L-1,0\leqslant k\leqslant KL-1$，仅在 $k=qL,(q=0,1,\cdots,K-1,r=0)$时不为零，其余位置均为零，零自相关区(zero autocorrelation zone, ZACZ)的长度为 $Z_{\mathrm{ACZ}}=(N/K)-1$。当 $K=1$ 时，$Z_{\mathrm{ACZ}}=N-1$，$\boldsymbol{x}_1$ 是完备序列。

由于 $X_L^{(a)}(j,k)=X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,k)$，$2\leqslant a\leqslant L$，可得 $\boldsymbol{x}_a$ 的自相关函数 $Z_L^{(a)}(j,k)$为

$$Z_L^{(a)}(j,k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{KL-1}X_L^{(a)}(j,l)\left[X_L^{(a)}(j,l-k)\right]^*$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{KL-1}X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,l)\left[X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,l-k)\right]^*$$
$$=\frac{1}{N}\{X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,0)\left[X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,0-k)\right]^*+\cdots+X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,KL-1)\left[X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,KL-1-k)\right]^*\}$$
$$=\begin{cases}1, & qL,q=0,1,\cdots,K-1,\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$Z_L^{(a)}(j,k)$有限 Zak 变换的逆变换为

$$z^{(a)}(k+rL)=L^{-1}\sum_{j=0}^{L-1}Z_L^{(a)}(j,k)e_L(-rj)$$
$$=L^{-1}\left[Z_L^{(a)}(0,k)e_L(0)+Z_L^{(a)}(1,k)e_L(-r)+\cdots+Z_L^{(a)}(L-1,k)e_L(-r(L-1))\right]$$
$$=\begin{cases}1, & k=qL,q=0,1,\cdots,K-1,r=0,\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

可以看出 $z^{(a)}(k+rL)$仅在 $k=qL,q=0,1,\cdots,K-1,r=0$ 时不为零，其余位置均为零，则零自相关区(ZACZ)的长度为 $Z_{\mathrm{ACZ}}=(N/K)-1$。当 $K=1$ 时，$Z_{\mathrm{ACZ}}=N-1$，$\boldsymbol{x}_a$ 构成完备序列。

(2)计算序列集 $\boldsymbol{S}$ 中序列的互相关情况

序列集 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_a(2\leqslant a\leqslant L)\}$由 L 个序列构成，序列的互相关函数的 FZT 为

$$Z_L^{(1,a)}(j,k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{KL-1}X_L^{(1)}(j,l)\left[X_L^{(a)}(j,l-k)\right]^*$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{KL-1}X_L^{(1)}(j,l)\left[X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,l-k)\right]^*$$
$$=\frac{1}{N}\{X_L^{(1)}(j,0)\left[X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,0-k)\right]^*+\cdots+X_L^{(1)}(j,KL-1)\left[X_L^{(1)}([(j+a-1)]_L,KL-1-k)\right]^*\}$$
$$=\begin{cases}1, & k=(L-a+1)+pL,p=0,1,\cdots,K-1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$Z_L^{(1,a)}(j,k)$有限 Zak 变换的逆变换 $z^{(1,a)}(k+rKL)$为

$$z^{(1,a)}(k+rKL)=L^{-1}\sum_{j=0}^{L-1}Z_L^{(1,a)}(j,k)e_L(-rj)$$
$$=L^{-1}\left[Z_L^{(1,a)}(0,k)e_L(-r\cdot 0)+Z_L^{(1,a)}(1,k)e_L(-r)+\cdots+Z_L^{(1,a)}(L-1,k)e_L(-r(L-1))\right]$$
$$=\begin{cases}L^{-1}\left[e_L(0)+e_L(-r)+\cdots+e_L(-r(L-1))\right], & \\ \qquad k=(L-a+1)+pL,p=0,1,\cdots,K-1, & \\ 0, \quad \text{else} & \end{cases}$$
$$=\begin{cases}L^{-1}\left[e_L^r(0)+e_L^r(-1)+\cdots+e_L^r(1-L)\right], & \\ \qquad k=(L-a+1)+pL,p=0,1,\cdots,K-1 & \\ 0, \quad \text{else} & \end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & r=0,k=(L-a+1)+pL,p=0,1,\cdots,K-1,\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

接下来讨论 $k=(L-a+1)+pL,p=0,1,\cdots,K-1$。

当 $a=L$ 时，k 取最小值 $k_{\min}=1+pL$，零互相关区(zero cross correlation zone, ZCCZ)长度最小 $Z_{\mathrm{CCZ}}=L$。当 $a=2$ 时，k 取最大值 $k_{\max}=(L-1)+pL$，零互相关区长度最大 $Z_{\mathrm{CCZ}}=(L-1)\cdot L$。

零互相关区长度最小的序列为 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_L$，零互相关区最大的序列为 $\boldsymbol{x}_i$ 和 $\boldsymbol{x}_{i+1}$，其中 $1\leqslant i\leqslant L-1$。当序列集 $\boldsymbol{S}$ 中序列的个数减少 h，$1\leqslant h\leqslant L-3$，零互相关区的长度增加 hL。

序列集 $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_a(2\leqslant a\leqslant L)\}$，其零自相关区长度 $Z_{\mathrm{ACZ}}=L^2-1$，零互相关区长度 $Z_{\mathrm{CCZ}}=L$，由此可得零相关区长度 $Z_{\mathrm{CZ}}=L$。

注：文献[21]中的序列长度为 $N=L\times M$，$L=M^2$，构造的 ZCZ 序列集大小为 L/M，ZCZ 宽度为 T_2M-1 或

$L-1$。但定理2构造出的ZCZ序列集大小为L,序列长度为$L\times KL$,序列的零相关区长度$Z_{CZ}=L$。当$L>M$时,由定理2构造出的ZCZ序列集比文献[21]构造出的序列集大,并且在序列长度相同时,所得的ZCZ序列集的零相关区长度更长。另外,定理2中的L没有限制,从而在构造出的ZCZ序列集时,序列长度的选择更加灵活。

为方便理解定理2,给出下列例子。

例2 设$L=5,K=2$,试根据定理2,构造ZCZ序列集。

解 设多相序列$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_a(a=2,3,4,5)$的长度为$N=5\times10$,有$0\leqslant j,r\leqslant4,0\leqslant k\leqslant9$,根据定理2可得,$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_a$的有限Zak变换分别为

$$\boldsymbol{X}_L^{(1)}=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\0&0&0&0&5&0&0&0&0&5\\0&0&0&5&0&0&0&0&5&0\\0&0&5&0&0&0&0&5&0&0\\0&5&0&0&0&0&5&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_L^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&5&0&0&0&0&5\\0&0&0&5&0&0&0&0&5&0\\0&0&5&0&0&0&0&5&0&0\\0&5&0&0&0&0&5&0&0&0\\5&0&0&0&0&5&0&0&0&5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_L^{(3)}=\begin{bmatrix}0&0&0&5&0&0&0&0&5&0\\0&0&5&0&0&0&0&5&0&0\\0&5&0&0&0&0&5&0&0&0\\5&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\0&0&0&0&5&0&0&0&0&5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_L^{(4)}=\begin{bmatrix}0&0&5&0&0&0&0&5&0&0\\0&5&0&0&0&0&5&0&0&0\\5&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\0&0&0&0&5&0&0&0&0&5\\0&0&0&5&0&0&0&0&5&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_L^{(5)}=\begin{bmatrix}0&5&0&0&0&0&5&0&0&0\\5&0&0&0&0&5&0&0&0&0\\0&0&0&0&5&0&0&0&0&5\\0&0&0&5&0&0&0&0&5&0\\0&0&5&0&0&0&0&5&0&0\end{bmatrix}$$

序列$\boldsymbol{x}_1$至$\boldsymbol{x}_5$的自相关函数的有限Zak变换都是为

$$\boldsymbol{Z}_L=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Z}_L$的有限Zak变换的逆变换为

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由$\boldsymbol{z}$可得,$Z_{ACZ}=L^2-1=24$。

$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_5$的互相关函数的有限Zak变换及其逆变换分别为

$$\boldsymbol{Z}_L^{(1,5)}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}^{(1,5)}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由$\boldsymbol{z}^{(1,5)}(k+rL)$可得$Z_{CCZ}=L=5$,综上所述$Z_{CZ}=L=5$。

$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_4$的互相关函数的有限Zak变换及其逆变换分别为

$$\boldsymbol{Z}_L^{(1,4)}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}^{(1,4)}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由$\boldsymbol{z}^{(1,4)}(k+rL)$可得,$Z_{CCZ}=2L=10$,综上所述$Z_{CZ}=2L=10$。

这样,可以由定理2得到ZCZ序列集$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{x}_5\}$,其中$\boldsymbol{x}_1$为

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&e_L(-4)&e_L(-3)&e_L(-2)&e_L(-1)&1&e_L(-4)&e_L(-3)&e_L(-2)&e_L(-1)\\1&e_L(-3)&e_L(-1)&e_L(-4)&e_L(-2)&1&e_L(-3)&e_L(-1)&e_L(-4)&e_L(-2)\\1&e_L(-2)&e_L(-4)&e_L(-1)&e_L(-3)&1&e_L(-2)&e_L(-4)&e_L(-1)&e_L(-3)\\1&e_L(-1)&e_L(-2)&e_L(-3)&e_L(-4)&1&e_L(-1)&e_L(-2)&e_L(-3)&e_L(-4)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

由于篇幅有限,$\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4,\boldsymbol{x}_5$ 不再一一列出。

3 结束语

针对 Brodzik 在 2011 年和 2013 年提出的完备序列和零相关区序列构造中参数的限制问题,本文分别提出完备序列和零相关区序列新构造的定理。定理 1 中的序列长度结构为 $N=L\times L$,只要满足 $\gcd(a,L)=1$,就可以给出完备序列 $\boldsymbol{x}_a$ 的 Zak 空间结构,再根据有限 Zak 变换的逆变换,得到完备序列 $\boldsymbol{x}_a$。定理 2 中的序列长度结构为 $N=L\times KL$,从而可以给出 ZCZ 序列集的 Zak 空间结构,再根据有限 Zak 变换的逆变换,得到 ZCZ 序列集。该 ZCZ 序列集大小为 L,序列长度为 $L\times KL$,序列的零相关区长度 $Z_{CZ}=L$。当 $L>M$ 时,相比文献[21]中的 ZCZ 序列集,在定理 2 构造出的 ZCZ 序列集中,该序列集的零相关区的长度更长,序列的数量更多。由此表明:相比 Brodzik 的完备序列和零相关区序列,定理 1 和定理 2 中的参数选择更加灵活。本文中所得到的完备序列和零相关区序列可以提供给雷达和通信工程人员参考。

参考文献:

[1] Golay M. Static Multislit Spectrometry and Its Application to the Panoramic Display of Infrared Spectra[J]. J Opt Soc Am,1951,41(7):468-472.

[2] Golay M. Complementary series[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1961,7(2):82-87.

[3] Tseng C C. Complementary sets of sequence [J]. IEEE Transactions on Information Theory,2003,18(5):644-652.

[4] Suehiro N, Hatori M. N-shift cross-orthogonal sequences [J]. IEEE Transactions on Information Theory,1988,34(1):143-146.

[5] Rathinakumar A, Chaturvedi A K. Complete Mutually Orthogonal Golay Complementary Sets From Reed-Muller Codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2008,54(3):1339-1346.

[6] Davis J A, Jedwab J. Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences and Reed-Muller codes [C]. Proceedings. 1998 IEEE International Symposium on Information Theory. IEEE,2002.

[7] Tseng C C, Liu C. Complementary sets of sequences [J]. IEEE Transactions on Information Theory,1972,18(5):644-652.

[8] Sivaswamy R. Multiphase complementary codes [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1978,24(5):546-552.

[9] Fan P, Yuan W, Tu Y. Z-complementary binary sequences[J]. IEEE Signal Process Letters. 2007,14(8):509-512.

[10] Tang X H, Fan P Z, Matsufuji S. Lower bounds on the maximum correlation of sequence set with low or zero correlation zone [J]. Electron. Letters. 2000,36:551-552.

[11] Adhikary A R, Majhi S, Liu Z. New Sets of Even-Length Binary Z-Complementary Pairs With Asymptotic ZCZ Ratio of $3/4$ [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2018,25(7):970-973.

[12] Adhikary A R, Majhi S, Liu Z, et al. New Sets of Optimal Odd-Length Binary Z-Complementary Pairs[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2020,66(1):669-678.

[13] Turyn R J. Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four symbol sequences, pulse compression and surface wave codings[J]. Journal of Combinatorial Theory,1974,16(3):313-333.

[14] Gu Z, Yang Y, Zhou Z. New Sets of Even-Length Binary Z-Complementary Pairs[J]. 2019 Ninth International Workshop on Signal Design and its Applications in Communications(IWSDA),2019:1-5.

[15] Xie C, Sun Y, Ming Y. Constructions of Optimal Binary Z-Complementary Sequence Sets With Large Zero Correlation Zone [J]. IEEE Signal Processing Letters,2021,28:1694-1698.

[16] Yu T, Adhikary A R, Wang Y. New Class of Optimal Z-Complementary Code sets[J]. IEEE Signal Processing Letters,2022,29:1477-1481.

[17] Chen C Y. A novel construction of Z-complementary pairs based on generalized Boolean functions [J]. IEEE Signal Process Letters,2017,24(7):284-287.

[18] Wu S W, Chen C Y. Optimal Z-Complementary Sequence Sets With Good Peak-to-Average Power-Ratio Property [J]. IEEE Signal Processing

Letters,2018,25(10):1500-1504.

[19] Zak J. Finite translations in solid-state physics [J]. Physical Review Letters, 1967, 19 (24): 1385-1387.

[20] Brodzik A K. Construction of Sparse Representations of Perfect Polyphase Sequences in Zak Space with Applications to Radar and Communications[J]. Eurasip Journal on Advances in Signal Processing,2011(1):1-14.

[21] Brodzik A K. On Certain Sets of Polyphase Sequences With Sparse and Highly Structured Zak and Fourier Transforms[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2013,59(10):6907-6916.

[22] 宗原. Zak 变换及其在 ZCZ 序列设计中的应用[D]. 西安:陕西师范大学,2020.

Constructions of Zero Correlation Zone Sequence Sets based on Finite Zak Transform

LIU Zhenzhen, LI Xudong

(Institute of Applied Mathematics,Xihua University,Chengdu 610039,China)

Abstract: In view of the restriction of parameters in the constructions of perfect sequences and zero correlation zone sequences in Brodzik's articles published in 2011 and 2013, new construction methods of perfect sequences and zero correlation zone sequences are proposed respectively in this paper. First of all, based on the finite Zak transformation, we propose a construction of perfect sequences without the restriction that the parameter is an odd prime number, and demonstrate it with the theory of congruence. Secondly, a Zak space structure of zero correlation zone sequence sets with sparse and structured characteristics is proposedto obtain the zero correlation zone sequence sets, which are proved by the finite Zak transformation and congruence theory. Compared with the zero correlation zone sequence sets in Brodzik's 2013 article, using the newly constructed zero-correlation region sequence set, the length of zero correlation zone is longer and the number of sequences is more.

Keywords: applied mathematics; mathematics and communication; finite Zak transform; perfect sequence; ZCZ; ZCZ sequence set