

文章编号: 2096-1618(2024)03-0389-08

# 基于最大相关熵的张量多视图子空间聚类

吴 锡<sup>1</sup>, 杜元花<sup>1</sup>, 周 楠<sup>2</sup>

(1. 成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225; 2. 成都大学, 四川 成都 610106)

**摘要:** 由于多个视图能够更加全面、恰当地描述数据信息, 对多视图子空间聚类(MVSC)算法研究的热度愈加高涨。将最大相关熵准则引入到张量多视图聚类, 并在块坐标下降求解框架下提出一个新的多视图子空间聚类算法, 称为基于最大相关熵准则的张量多视图子空间聚类(TMVSC-MCC)算法。提出的优化模型将所有视图的子空间表示矩阵视作一个三阶张量。通过对张量施加低秩约束与引入最大相关熵准则的度量使所提出的模型不仅能够通过张量低秩约束充分挖掘视图间的高阶相关信息, 并通过最大相关熵准则的度量消除多视图数据中噪声的影响。由于提出模型的非凸性, 利用加速块坐标下降算法对模型进行有效求解。为验证 TMVSC-MCC 算法的性能, 在 4 个图像数据集上进行对比实验, 结果证实所提出的算法优于其他 9 种聚类算法。

**关键词:** 最大相关熵准则; 张量; 多视图; 块坐标下降; 聚类

**中图分类号:** O183.2

**文献标志码:** A

**doi:** 10.16836/j.cnki.jcuit.2024.03.018

## 0 引言

多年来, 子空间聚类广泛应用于计算机视觉和机器学习等领域, 如图像的分割、信号的处理、模式的识别等<sup>[1-4]</sup>。子空间聚类算法简单来说, 就是结合传统特征选择和聚类算法, 在数据样本聚类过程中, 得到各个数据簇相应的特征子集或权重。根据数据视图个数, 子空间聚类大致分为两类: 单视图子空间聚类和多视图子空间聚类。

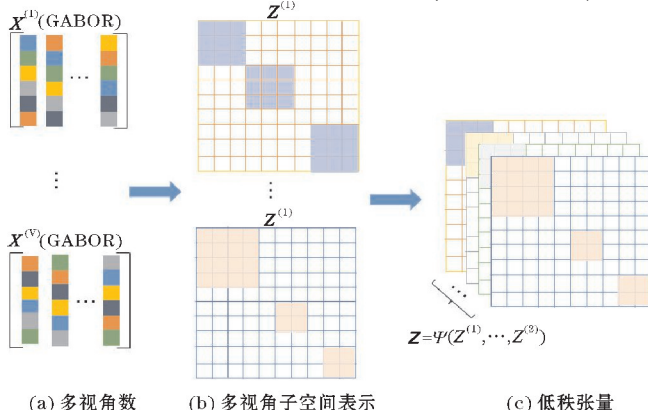
单视图子空间聚类需要找到适合每组数据点的低维子空间, 然后把数据点聚类到多个子空间中。其两种代表性方法是稀疏子空间聚类<sup>[5]</sup> (sparse subspace clustering) 和低秩表示<sup>[6]</sup> (low rank representation), 在许多实验中都证实了它们的高聚类性能。基于这两种方法, 已提出多种 SSC 和 LRR 变体方法<sup>[7-8]</sup>。然而, 这些方法的聚类结果是从单个视图的特征获取的, 无法发掘不同视图特征间的相关性。

一般从多个子空间提取数据点, 因而多视图子空间聚类依照数据的各个视图特征, 将数据分成多个底层子空间, 进而通过不同视图特征的互补性提升聚类效果。目前, 已提出大量的多视图子空间聚类算法 (multi-view subspace clustering) 来进行潜藏于不同视图中的内在信息的学习<sup>[9-14]</sup>。Gao 等<sup>[15]</sup> 构建全部视图的共享亲和矩阵实现联合子空间表示的学习, 以此得到多视图子空间聚类。Li 等<sup>[16]</sup> 采用灵活多视图表示, 避免使用部分信息进行数据的重建。虽然上述方法在多视图数据集上取得了令人满意的性能, 但忽略了数据多个视图背后的

高阶关联性, 只是捕获不同视图间的成对相关性。为解决该问题, Zhang 等<sup>[17]</sup> 考虑用潜在表示实现数据点的聚类, 提出潜在多视图子空间聚类 (LMSC) 方法, 能够从多个视图中探索潜在的补充信息。

近年来, 借助张量奇异值分解<sup>[18]</sup> (tensor singular value decomposition) 来恢复图像的缺失数据。因而基于 t-SVD, 提出一种新颖的张量范数, 即张量核范数<sup>[19]</sup> (tensor nuclear norm), 该范数的优势在于能沿着张量的任何模方向加以低秩约束。Xie 等<sup>[12]</sup> 基于张量奇异值分解提出一个新的多视图子空间聚类方法, 限制不同视图间的一致性且充分挖掘了视图间的互补关系。Wu 等<sup>[13]</sup> 利用张量核范数的正则化, 使张量保持低秩属性, 提出多视图子空间聚类的张量学习方法 (ETLMSC)。

上述方法都是基于二次距离度量来进行建模, 对非高斯噪声和冲击噪声会比较敏感, 影响聚类效果。本文提出一种基于最大相关熵准则的张量多视图子空间聚类方法 (TMVSC-MCC)。将所有视图的子空间表示矩阵通过叠加视作一个三阶张量 (如图 1 所示)。



(a) 多视角数

(b) 多视角子空间表示

(c) 低秩张量

图 1 三阶张量

收稿日期: 2022-11-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11901063)

通信作者: 杜元花. E-mail: duyh@cuit.edu.cn

借助张量低秩约束与最大相关熵准则的度量,充分挖掘视图间的高阶相关性信息,同时消除多视图数据中的噪声带来的不利影响。此外,在加速块坐标下降框架下对模型进行有效求解。

## 1 预备知识

### 1.1 符号

文中  $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{x}$  依次表示张量、矩阵和向量。三阶张量  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的切片可以借助固定一个索引获得,即  $\mathbf{X}(i, :, :)$ 、 $\mathbf{X}(:, j, :)$  和  $\mathbf{X}(:, :, k)$  分别表示第  $i$  个水平切片、第  $j$  个侧面切片和第  $k$  个正面切片,这里简记  $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}(:, :, k)$ 。张量  $\mathbf{X}$  的纤维通过固定两个维度,保留一个维度变化获得,即  $\mathbf{X}(:, j, k)$ 、 $\mathbf{X}(i, :, k)$  和  $\mathbf{X}(i, j, :)$  依次表示模 1 纤维、模 2 纤维和模 3 纤维。 $\mathbf{X}_f = \text{fft}(\mathbf{X}, [ ], 3)$  表示张量  $\mathbf{X}$  沿模 3 的快速傅里叶变换,其逆运算为  $\mathbf{X} = \text{ifft}(\mathbf{X}_f, [ ], 3)$ 。 $\text{unfold}(\mathbf{X}) = [\mathbf{X}^{(1)}; \mathbf{X}^{(2)}; \dots; \mathbf{X}^{(n_3)}]$  表示张量  $\mathbf{X}$  的展开,其逆运算为  $\text{fold}(\text{unfold}(\mathbf{X})) = \mathbf{X}$ 。

### 1.2 预备知识

**定义 1** (张量块循环矩阵) 张量  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的块循环矩阵表述为

$$\text{bcirc}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(n_3)} & \mathbf{X}^{(n_3-1)} & \dots & \mathbf{X}^{(2)} \\ \mathbf{X}^{(2)} & \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(n_3)} & \dots & \mathbf{X}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}^{(n_3)} & \mathbf{X}^{(n_3-1)} & \mathbf{X}^{(n_3-2)} & \dots & \mathbf{X}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

**定义 2** (张量  $t$  积) 若有  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  和  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_4 \times n_3}$ , 则它们的  $t$  积  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  ( $\times$  表示张量的乘积, 全文同) 是  $n_1 \times n_4 \times n_3$  维的张量, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{fold}(\text{bcirc}(\mathbf{A}) \times \text{unfold}(\mathbf{B})) \quad (2)$$

**定义 3** (张量转置) 若  $\mathbf{X}$  是  $n_1 \times n_2 \times n_3$  维的张量, 则其转置记为  $\mathbf{X}^T \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1 \times n_3}$ , 即将  $\mathbf{X}$  的每个正面切片进行转置, 然后按 2 到  $n_3$  顺序颠倒排列转置后的切片。

**定义 4** (单位张量) 如果张量  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的首个正面切片是  $n_1 \times n_1$  维的单位矩阵, 而其他正面切片为零, 则  $\mathbf{I}$  称为单位张量。

**定义 5** (正交张量) 张量  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  是正交的, 如果满足:

$$\mathbf{X}^T \times \mathbf{X} = \mathbf{X} \times \mathbf{X}^T = \mathbf{I} \quad (3)$$

**定义 6** ( $f$ -对角张量) 假设张量  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  的全部正面切片均是对角阵, 那么  $\mathbf{Q}$  称作  $f$ -对角张量。

**定义 7** (张量 SVD) 若有张量  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 则它的奇异值分解表述为  $\mathbf{X} = \mathbf{U} \times \mathbf{S} \times \mathbf{V}^T$ , 其中  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  互为正交张量,  $\mathbf{S}$  是  $f$ -对角张量。

**定义 8** (基于  $t$ -SVD 的张量核范数) 若有张量  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , 其核范数定义为

$$\|\mathbf{X}\|_* = \sum_{k=1}^{n_3} \|\mathbf{X}_f^{(k)}\|_* = \sum_{i=1}^{\min(n_1, n_2)} \sum_{k=1}^{n_3} |\mathbf{S}_f^{(k)}(i, i, k)| \quad (4)$$

即张量经过傅里叶变换后, 所有正面切片的奇异值之和, 其中  $\mathbf{S}_f^{(k)}$  由  $\mathbf{X}_f^{(k)} = \mathbf{U}_f^{(k)} * \mathbf{S}_f^{(k)} * \mathbf{V}_f^{(k)T}$  计算得到。

## 2 基于相关熵的张量多视图子空间聚类

假设  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N] \in \mathbb{R}^{D \times N}$  是数据矩阵, 其中  $\{\mathbf{x}_i, i=1, 2, \dots, N\}$  是  $D$  维的样本向量。为了使数据点聚类到各个子空间中, 首先计算一个子空间表示矩阵  $\mathbf{Z}$ :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}, \mathbf{E}} R(\mathbf{Z}) + \lambda L(\mathbf{X}, \mathbf{XZ}), \\ \text{s. t. } \mathbf{X} = \mathbf{XZ} + \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是学习子空间表示矩阵, 每个  $\{\mathbf{z}_i, i=1, 2, \dots, N\}$  是从样本  $\{\mathbf{x}_i, i=1, 2, \dots, N\}$  学习得到的,  $\mathbf{E}$  表示重构误差。  $L(\cdot, \cdot)$  表示损失函数,  $R(\cdot)$  表示正则化子,  $\lambda$  是限制损失惩罚强度的超参数。得到子空间表示矩阵  $\mathbf{Z}$  后, 接下来需要获取亲和矩阵 (如借助  $(|\mathbf{Z}| + |\mathbf{Z}^T|)/2$ ), 然后将其输入谱聚类算法<sup>[20]</sup>中, 以拥有最终的聚类结果。

虽然上述操作能够取得令人满意的结果, 但依赖于单视图数据。因此可以根据文献<sup>[10]</sup>提出的处理多视图数据的方法, 式(5)可以推广为多视图形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)} \mid v=1}^V (R(\mathbf{Z}^{(v)}) + \lambda_v L(\mathbf{X}^{(v)}, \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)})) \\ \text{s. t. } \mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, v=1, 2, \dots, V \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{X}^{(v)}$ 、 $\mathbf{Z}^{(v)}$  和  $\mathbf{E}^{(v)}$  分别表示视图的数据、子空间表示和重构误差,  $\lambda_v$  是限制各视图损失惩罚强度的超参数,  $V$  是视图数。显然, 这种方式独立地考虑每个视图, 忽略了不同视图间的关联性, 于是采用对每个视图下的子空间表示构成的张量进行低秩张量正则化的方式来解决该问题, 进而充分挖掘视图间的联系。

### 2.1 提出的优化模型

借助低秩张量约束, 引入最大相关熵准则来减少多视图数据中无关视图的影响, 提出一种基于最大相关熵准则的低秩张量约束的多视图子空间聚类算法, 实现不同视图子空间表示的联合学习, 并且发掘不同视图间的隐形相关性。这里给出文献<sup>[21-22]</sup>中使用的张量核范数的定义。

$$\|\mathbf{Z}\|_* = \sum_{m=1}^M \xi_m \|\mathbf{Z}_m\|_* \quad (7)$$

其中,  $\xi_m$  是常数, 满足  $\xi_m > 0$  且  $\sum_{m=1}^M \xi_m = 1$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{I_2 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  是  $M$  阶张量, 沿第  $m$  模展开得到矩阵  $\mathbf{Z}_m$ , 即  $\mathbf{Z}_m = \text{unfold}_m(\mathbf{Z}) \in \mathbb{R}^{I_m \times (I_1 \times \dots \times I_{m-1} \times I_{m+1} \times \dots \times I_M)}$ <sup>[23-24]</sup>。张量核范数实

质上是沿各模展开后的全体矩阵的核范数的凸组合。

根据多视图形式(6),对重构误差项进行最大相关熵准则约束处理,目标函数表述为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}} & \|\mathbf{Z}\|_* - \lambda \sum_{v=1}^V \exp\left(-\frac{\|\mathbf{E}^{(v)}\|_F^2}{2\sigma^2}\right) \\ \text{s. t. } & \mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, \quad v=1, 2, \dots, V \\ & \mathbf{Z} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)}) \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $\Psi(\cdot)$  将各子空间表示  $\mathbf{Z}^{(v)}$  整合为  $N \times N \times V$  的三阶张量  $\mathbf{Z}$ , 如图1所示。

对于目标函数式(8),用式(7)代替张量  $\mathbf{Z}$  的核范数,式(8)的优化问题转化为

$$\min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}} \sum_{m=1}^M \gamma_m \|\mathbf{Z}_m\|_* - \sum_{v=1}^V \exp\left(-\frac{\|\mathbf{E}^{(v)}\|_F^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9)$$

其中,  $\gamma_m = \frac{\xi_m}{\lambda} > 0$  表示低秩张量约束的强度,约束条件与式(6)中的相同。注意到,  $\mathbf{Z}^{(v)}$  是第  $v$  个视图的子空间表示,而  $\mathbf{Z}_m$  是沿第  $m$  模展开矩阵。

## 2.2 优化求解算法设计

由于变量  $\mathbf{Z}_m$  与目标函数存在约束耦合,所以按照文献[22]的方式引入  $M$  个辅助变量  $\mathbf{G}_m$ ,使变量  $\mathbf{Z}_m$  分离出来:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Z}^{(v)}, \mathbf{E}^{(v)}} & \sum_{m=1}^M \gamma_m \|\mathbf{G}_m\|_* - \sum_{v=1}^V \exp\left(-\frac{\|\mathbf{E}^{(v)}\|_F^2}{2\sigma^2}\right) \\ \text{s. t. } & \mathbf{G}_m = \mathbf{Z}_m, \quad m=1, 2, \dots, M, \\ & \mathbf{X}^{(v)} = \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)} + \mathbf{E}^{(v)}, \quad v=1, 2, \dots, V \\ & \mathbf{Z} = \Psi(\mathbf{Z}^{(1)}, \mathbf{Z}^{(2)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)}) \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L_\mu(\mathbf{Z}^{(1)}, \dots, \mathbf{Z}^{(V)}; \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_M) = & \sum_{m=1}^M \gamma_m \|\mathbf{G}_m\|_* - \\ & \sum_{v=1}^V \exp\left(-\frac{\|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)}\|_F^2}{2\sigma^2}\right) + \sum_{m=1}^M \left( \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m\|_F^2 + \right. \\ & \left. \langle \alpha_m, \mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m \rangle \right) \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\mu$  是正惩罚参数,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是矩阵内积运算,  $\alpha_m$  是拉格朗日乘子。

由于式(11)是非凸的,在加速块坐标下降框架下进行式(11)的更新求解。

(i) 通过 Fenchel 共轭方法等价  
根据文献[25],令

$$\varphi(z) = z - z \ln(-z) \quad (12)$$

通过芬歇尔共轭<sup>[26]</sup>,很容易验证

$$\exp(-x) = \sup \{ zx - \varphi(z) \} \quad (13)$$

设  $(\partial/\partial z)(zx - \varphi(z)) = x + \ln(-z) = 0$ , 就可以得到在  $z = -\exp(-x)$  处达到式(13)的最大值。

基于上述发现,引入向量  $\mathbf{p}$ ,对优化问题(11)做简化处理,定义

$$f(\mathbf{Z}, \mathbf{p}, \mathbf{G}_m, \alpha_m) = \sum_{v=1}^V \left( \mathbf{p}_v \frac{\|\mathbf{X}^{(v)} - \mathbf{X}^{(v)} \mathbf{Z}^{(v)}\|_F^2}{2\sigma^2} - \varphi(\mathbf{p}_v) \right) -$$

$$\sum_{m=1}^M \left( \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m\|_F^2 + \langle \alpha_m, \mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m \rangle \right) \quad (14)$$

由于各视图是独立的,所以在每个视图上有

$$f(\mathbf{Z}, \mathbf{p}, \mathbf{G}_m, \alpha_m) = \text{Tr}[(\mathbf{X} - \mathbf{XZ})\mathbf{P}(\mathbf{X} - \mathbf{XZ})^T] - \sum_{m=1}^M \left( \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m\|_F^2 + \langle \alpha_m, \mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m \rangle \right) \quad (15)$$

问题(10)就等价于

$$\max_{\mathbf{Z}, \mathbf{p}, \mathbf{G}_m, \alpha_m} f(\mathbf{Z}, \mathbf{p}, \mathbf{G}_m, \alpha_m) - \sum_{m=1}^M \gamma_m \|\mathbf{G}_m\|_* \quad (16)$$

(ii) BCU 迭代法

在每次迭代中只更新一个变量,并将其余变量固定为其最新值。具体地,更新:

$$\mathbf{p}^{t+1} = \arg\max_{\mathbf{p}} f(\mathbf{Z}^t, \mathbf{p}, \mathbf{G}_m^t, \alpha_m^t) \quad (17)$$

$$\mathbf{Z}^{t+1} = \arg\max_{\mathbf{Z} \geq 0} \langle \nabla_{\mathbf{Z}} f(\hat{\mathbf{Z}}^t, \mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{G}_m^t, \alpha_m^t), \mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}}^t \rangle - \frac{L^t}{2} \|\mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}}^t\|_F^2 \quad (18)$$

其中,  $\nabla_{\mathbf{Z}} f(\cdot)$  是与  $\mathbf{Z}$  有关的部分梯度,  $L^t$  是与  $\mathbf{Z}$  有关的  $\nabla_{\mathbf{Z}} f(\mathbf{Z}, \mathbf{p}^{t+1})$  的利普希茨连续条件常数,  $\hat{\mathbf{Z}}^t = \mathbf{Z}^t + \omega^t (\mathbf{Z}^t - \mathbf{Z}^{t-1})$  是权重为  $\omega^t \in [0, 1]$  的外推点,能够利用BCU方法求解某多块优化问题<sup>[27]</sup>。

接下来对每一次迭代,按如下方式更新每个变量:

(1) 求解子问题  $\mathbf{p}$ : 如前文所述,当  $\mathbf{z} = -\exp(-x)$  时,可以得到式(13)的最大值。因此,子问题  $\mathbf{p}$  的解可以明显得到:

$$\mathbf{p}_i^{t+1} = -\exp\left(-\frac{\|x_i - \mathbf{XZ}^t\|_F^2}{2\sigma^2}\right), \quad \forall i=1, 2, \dots, N \quad (19)$$

从式(19)可知,对偶变量的更新将更新每个样本距离度量的权重,提高对异常值的鲁棒性。如果一个样本是异常值,则其对应的距离较大,权重趋于零,这样就消除了异常值的负面影响。

(2) 求解子问题  $\mathbf{Z}^{(v)}$ : 对于更新子空间表示矩阵  $\mathbf{Z}^{(v)}$ ,求解过程如下:

令  $\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{Z}} f(\hat{\mathbf{Z}}^t, \mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{G}_m^t, \alpha_m^t)$ ,  $L = L^t$ , 式(18)可以写成

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(\mathbf{X} - \mathbf{XZ})\mathbf{P}(\mathbf{X} - \mathbf{XZ})^T] + \sum_{m=1}^M \left( \frac{\mu}{2} \text{tr}[(\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m^t)^T(\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m^t)] + \text{tr}[\alpha_m^t{}^T(\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m^t)] \right) \\ & = \text{tr}[\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{P}\mathbf{X}^T + \mathbf{X}\mathbf{Z}\mathbf{P}\mathbf{Z}^T\mathbf{X}^T] \\ & + \sum_{m=1}^M \left[ \frac{\mu}{2} \text{tr}(\mathbf{Z}_m^T \mathbf{Z}_m - 2\mathbf{Z}_m^T \mathbf{G}_m^t + \frac{2}{\mu} \alpha_m^t{}^T \mathbf{Z}_m - \frac{2}{\mu} \alpha_m^t{}^T \mathbf{G}_m^t) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

去除式(20)中与  $\mathbf{Z}$  无关的项,式(20)可以重新表述为

$$\begin{aligned} & \arg\max_{\mathbf{Z}^{(v)} \geq 0} \text{tr}[\mathbf{A}^T(\mathbf{Z}^{(v)} - \hat{\mathbf{Z}}^{(v)t})] - \frac{L}{2} \text{tr}[(\mathbf{Z}^{(v)} - \hat{\mathbf{Z}}^{(v)t})^T(\mathbf{Z}^{(v)} - \hat{\mathbf{Z}}^{(v)t})] \\ & \Leftrightarrow \arg\max_{\mathbf{Z}^{(v)} \geq 0} -\frac{L}{2} \text{tr}\left(\frac{2}{L} \mathbf{Z}^{(v)T} \mathbf{A} + \mathbf{Z}^{(v)T} \mathbf{Z}^{(v)} - 2\mathbf{Z}^{(v)T} \hat{\mathbf{Z}}^{(v)t}\right) \\ & \Leftrightarrow \arg\min_{\mathbf{Z}^{(v)} \geq 0} \text{tr}\left[\mathbf{Z}^{(v)T} \mathbf{Z}^{(v)} - 2\mathbf{Z}^{(v)T}(\hat{\mathbf{Z}}^{(v)t} + \frac{1}{L} \mathbf{A})\right] \\ & \Leftrightarrow \arg\min_{\mathbf{Z}^{(v)} \geq 0} \frac{1}{2} \left\| \mathbf{Z}^{(v)} - \left(\hat{\mathbf{Z}}^{(v)t} + \frac{1}{L} \mathbf{A}\right) \right\|_F^2 \end{aligned} \quad (21)$$



最终,式(21)的等价形式为

$$\min_{\mathbf{Z}^{(v)} \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{Z}^{(v)} - \mathbf{B}\|_F^2 \quad (22)$$

其中,  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{Z}}^{(v)l} + \frac{1}{L^l} \nabla_{\mathbf{Z}} f(\hat{\mathbf{Z}}^l, \mathbf{p}^{l+1}, \mathbf{G}_m^l, \alpha_m^l)$ 。显然,上述问题有闭形式解,那么子问题  $\mathbf{Z}^{(v)}$  能够明确地解决。

(3) 求解子问题  $\mathbf{Z}$ : 对于更新  $\mathbf{Z}$ , 通过直接替换相应的元素来更新  $\mathbf{Z}^{(v)}$ , 如下所示:

$$\mathbf{Z}^* \leftarrow \mathbf{Z}^{(v)} \quad (23)$$

当获得多个视图的所有  $\mathbf{Z}^{(v)}$  时, 可以更新一次  $\mathbf{Z}$ 。

(4) 求解子问题  $\mathbf{G}_m$ : 根据文献[10],  $\mathbf{G}_m$  可以更新, 直接得到结果。

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m^* &= \argmin_{\mathbf{G}_m} \gamma_m \|\mathbf{G}_m\|_* + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m\|_F^2 + \langle \alpha_m, \mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m \rangle \\ &= \text{prox}_{\beta_m}^{\text{tr}}(\mathbf{G}_m + \alpha_m) \end{aligned} \quad (24)$$

其中,  $\beta_m = \frac{\gamma_m}{\mu}$  表示的是, 谱软阈值运算  $\text{prox}_{\beta_m}^{\text{tr}}(\mathbf{L}) = \text{Umax}(\mathbf{S} - \beta_m, 0) \mathbf{V}^T$  得到的阈值,  $\mathbf{L} = \mathbf{USV}^T$  是矩阵  $\mathbf{L}$  的奇异值分解(SVD), 并且按最大元素进行计算。

(5) 求解子问题  $\alpha_m$ : 变量  $\alpha_m$  通过以式(25)更新:

$$\alpha_m^* = \alpha_m + (\mathbf{Z}_m - \mathbf{G}_m) \quad (25)$$

(iii) 参数设置

值得注意的是, 要完全确定式(18)中的变量  $\mathbf{Z}^{(v)}$  的更新, 需要有利普希茨常数  $L^l$  的值和权重  $\omega$  的值。在提出的算法中, 利普希茨常数设置为

对任意  $\tilde{\mathbf{Z}}$  和  $\hat{\mathbf{Z}}$ , 有

$$\begin{aligned} &\|\nabla_{\mathbf{Z}} f(\tilde{\mathbf{Z}}) - \nabla_{\mathbf{Z}} f(\hat{\mathbf{Z}})\|_F \\ &= \|\mu \sum_{m=1}^M (\tilde{\mathbf{Z}}_m - \hat{\mathbf{Z}}_m) + 2(\mathbf{X}^T \mathbf{X} \tilde{\mathbf{Z}} \mathbf{P} - \mathbf{X}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{P})\|_F \\ &= \|\mu \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}}) + 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}(\tilde{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}}) \mathbf{P}\|_F \\ &\leq \|2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\|_2 \|\tilde{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{P}\|_2 \\ &= \|2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2 \|\tilde{\mathbf{Z}} - \hat{\mathbf{Z}}\|_F \end{aligned} \quad (26)$$

因此  $L^l = \|2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\|_2 \|\mathbf{P}\|_2$ 。其中,  $\mathbf{P}$  是对角元素是  $\mathbf{p}$  的对角阵。对外推权重, 根据文献[25]设置为

$$\omega^l = \min\left(\omega^l, \delta_{\omega} \sqrt{\frac{L^{l-1}}{L^l}}\right) \quad (27)$$

其中,  $\delta_{\omega} < 1$  是预先预定的,  $\omega^l = (\tau_{l-1} - 1) / \tau_l$ , 有

$$\tau_0 = 1, \tau_l = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4\tau_{l-1}^2}) \quad (28)$$

求解问题式(8)的全部过程在算法1中进行概述。

### 3 实验与分析

在4个图像数据集加以实验, 用来测试所提出方法的性能, 包括Yale数据集、扩展YaleB数据集、ORL数据集和COIL-20数据集, 实例图像见图2所示, 统计数据归纳在表1中。

表1 4个多视图数据集总结

数据集	样本数	视图数	聚类数
Yale	165	3	11
扩展 YaleB	640	3	10
ORL	400	3	10
COIL-20	1440	3	20

Yale<sup>1</sup> 表示该数据集在耶鲁大学构建, 涉及15个人, 在不同的神态、姿势和光照下的生成11张面部图像, 共165张图片。

扩展YaleB<sup>2</sup> 表示该数据集涵盖38个人, 在不同照明下生成大约64个近面图像。与其他工作类似, 采取前10类开展测验, 即640张正面脸部图片。

ORL<sup>3</sup> 表示该数据集囊括40个的类型, 每个类型的图像有10张。这些图像是在不同时间拍摄的, 在光照、面部神态和脸部细节(如戴眼镜)3个方面构造的多视图数据。

COIL-20<sup>4</sup> 表示该数据集囊括20种对象, 每个对象有包含72幅图片, 共1440张图像, 以32×32像素阵列标准化所有的图像, 像素的灰度级为256。



图2 4个图像数据集例子(从上到下依次对应于Yale、扩展YaleB、ORL和COIL-20)

#### 3.1 聚类结果比较

现在大多聚类方法都是在利用K-均值算法获得亲和矩阵后, 执行标准的谱聚类算法得到最终的聚类结果, 将每种算法运行50次, 并计算其均值与标准差来作为最后的聚类结果。将TMVSC-MCC与以下最先进的方法进行比较:

SPC<sub>best</sub><sup>[20]</sup>: 使用标准光谱聚类算法中信息量最大的视图。LRR<sub>best</sub><sup>[28]</sup>: 使用低秩约束和性能最佳的单视图特征。RTC<sup>[29]</sup>: 采用了张量表示图像, 对异常值具有鲁棒性。FeatConcat<sub>pca</sub><sup>[30]</sup>: 将所有视图连接起来, 然后采用主成分分析将特征维度减小到300。Co-Reg SPC<sup>[31]</sup>: 对聚类假设进行联合正则化, 使得相应的数据点具有同样的聚类隶属度。Min-Disagreement<sup>[32]</sup>: 思想是基于二部图实现的。ConvexReg SPC<sup>[33]</sup>: 采用所有

视图的通用表示学习。RMSC<sup>[9]</sup>:对共享的低秩转移概率矩阵进行恢复处理,继而开展聚类实验。PCA+LRR<sup>[34]</sup>:将所有视图连接起来,同时采用主成分分析将特征维数降到 300,然后应用到低秩表示的方法上。

实验中采用 6 种评估指标来评价聚类性能,分别是:归一化互信息(NMI)、准确度(ACC)、调整后的兰德指数(AR)、F 分数(F-score)、精确度(Precision)和召回率(Recall)。对于这些指标,值越高表示聚类质量越好。如果没有特别说明,所有实验都使用内积核计算图的相似度。在所有 4 个数据集上,对所有比较的方法,将参数调整到最佳值。

不同方法在 4 个图像数据集上的详细聚类结果如表 2~表 5 所示,其中最好的结果用加粗来表示。

算法 1 TMVSC-MCC 算法

输入:特征矩阵 $\{\mathbf{X}^{(v)}\}$ ;参数 $g_m$ 和聚类数 $K$   
初始化: $\mathbf{Z}^{(1)}=\cdots=\mathbf{Z}^{(V)}=\mathbf{0};\alpha_1=\cdots=\alpha_M=\mathbf{0};\mathbf{G}_1=\cdots=\mathbf{G}_M=\mathbf{0};m=10^{-6};r=1;$   
 $e=10^{-7};\max_m=10^8$

while 不收敛 do:  
  for 每个视图 do:  
    更新  $p\leftarrow$ 根据式(19)  
    更新  $\mathbf{Z}^{(v)}\leftarrow$ 根据式(22)  
  end for  
  更新  $\mathbf{Z}\leftarrow$ 根据式(23)  
  for 每个模 do:  
    更新  $\mathbf{G}_m\leftarrow$ 根据式(24)  
    更新  $\alpha_m\leftarrow$ 根据式(25)  
  end for  
  通过  $m=\min(rm,\max m)$  更新参数  $m$ ;  
  检查收敛条件:  $\|\mathbf{Z}_m-\mathbf{G}_m\|_\infty<e$ ;  
end while  
通过  $\mathbf{S}=\frac{1}{V}\sum_{v=1}^V(|\mathbf{Z}^{(v)}|+|\mathbf{Z}^{(v)\top}|)$  组合每个视图的所有子空间表示;  
将谱聚类算法应用于亲和矩阵  $\mathbf{S}$ ;  
输出:聚类结果(iii)

表 2 在 Yale 数据集上的结果

方法	NMI	ACC	AR	F-score	Precision	Recall
SPC <sub>best</sub>	0.653±0.010	0.617±0.029	0.441±0.010	0.476±0.010	0.456±0.012	0.494±0.011
LRR <sub>best</sub>	0.698±0.112	0.696±0.001	<b>0.516±0.003</b>	0.548±0.008	<b>0.528±0.004</b>	0.564±0.005
RTC	0.606±0.014	0.593±0.015	0.372±0.045	0.413±0.011	0.383±0.004	0.442±0.026
FeatConcate <sub>pCA</sub>	0.664±0.036	0.577±0.039	0.397±0.010	0.433±0.012	0.420±0.011	0.449±0.010
PCA+LRR	0.631±0.007	0.583±0.040	0.354±0.008	0.395±0.007	0.359±0.008	0.442±0.009
Co-Reg SPC	0.649±0.001	0.563±0.001	0.435±0.003	0.467±0.001	0.456±0.005	0.492±0.004
Min-Disagreement	0.644±0.006	0.616±0.044	0.432±0.007	0.471±0.005	0.445±0.006	0.495±0.005
ConvexReg SPC	0.674±0.022	0.612±0.034	0.445±0.033	0.502±0.029	0.475±0.031	0.533±0.030
RMSC	0.683±0.032	0.641±0.033	0.457±0.045	0.516±0.042	0.501±0.044	0.534±0.045
TMVSC-MCC	<b>0.706±0.000</b>	<b>0.703±0.000</b>	0.464±0.000	<b>0.585±0.000</b>	0.522±0.000	<b>0.570±0.000</b>

表 3 在扩展 YaleB 数据集上的结果

方法	NMI	ACC	AR	F-score	Precision	Recall
SPC <sub>best</sub>	0.361±0.017	0.365±0.060	0.226±0.017	0.304±0.012	0.297±0.011	0.311±0.011
LRR <sub>best</sub>	0.624±0.003	0.614±0.014	0.452±0.003	0.407±0.005	0.482±0.021	0.510±0.002
RTC	0.372±0.000	0.361±0.001	0.216±0.004	0.292±0.002	0.286±0.004	0.295±0.001
FeatConcatePCA	0.153±0.004	0.233±0.006	0.070±0.003	0.162±0.003	0.157±0.000	0.163±0.003
PCA+LRR	0.569±0.006	0.570±0.011	0.401±0.002	0.464±0.001	0.434±0.003	0.496±0.001
Co-Reg SPC	0.152±0.002	0.225±0.001	0.067±0.000	0.161±0.001	0.156±0.002	0.163±0.002
Min-Disagreement	0.187±0.004	0.243±0.019	0.089±0.002	0.182±0.000	0.175±0.000	0.190±0.001
ConvexReg SPC	0.164±0.023	0.217±0.018	0.073±0.013	0.163±0.011	0.164±0.011	0.164±0.012
RMSC	0.158±0.020	0.211±0.014	0.061±0.015	0.156±0.013	0.152±0.011	0.160±0.014
TMVSC-MCC	<b>0.675±0.000</b>	<b>0.628±0.000</b>	<b>0.456±0.000</b>	<b>0.470±0.000</b>	<b>0.483±0.000</b>	<b>0.510±0.000</b>

表 4 在 ORL 数据集上的结果

方法	NMI	ACC	AR	F-score	Precision	Recall
SPC <sub>best</sub>	0.883±0.003	0.725±0.024	0.654±0.006	0.663±0.006	0.609±0.004	0.727±0.004
LRR <sub>best</sub>	0.894±0.005	0.772±0.002	0.723±0.021	0.696±0.003	0.702±0.000	0.755±0.000
RTC	0.793±0.002	0.600±0.001	0.449±0.003	0.464±0.003	0.387±0.031	0.580±0.002
FeatConcate <sub>pCA</sub>	0.836±0.003	0.674±0.027	0.563±0.011	0.573±0.011	0.533±0.012	0.623±0.007
PCA+LRR	0.866±0.002	0.751±0.032	0.651±0.008	0.657±0.006	0.623±0.008	0.695±0.009
Co-Reg SPC	0.852±0.004	0.714±0.001	0.601±0.005	0.614±0.001	0.566±0.003	0.665±0.005
Min-Disagreement	0.875±0.001	0.747±0.050	0.655±0.003	0.662±0.003	0.614±0.003	0.717±0.002
ConvexReg SPC	0.882±0.012	0.733±0.032	0.667±0.033	0.675±0.034	0.629±0.040	0.730±0.031
RMSC	0.871±0.011	0.721±0.024	0.643±0.030	0.653±0.029	0.606±0.032	0.708±0.028
TMVSC-MCC	<b>0.895±0.000</b>	<b>0.773±0.000</b>	<b>0.744±0.000</b>	<b>0.704±0.000</b>	<b>0.712±0.000</b>	<b>0.829±0.000</b>

表 5 在 COIL-20 数据集上的结果

方法	NMI	ACC	AR	F-score	Precision	Recall
SPC <sub>best</sub>	0.807±0.007	0.662±0.062	0.618±0.019	0.641±0.016	0.595±0.022	0.691±0.014
LRR <sub>best</sub>	0.828±0.007	0.762±0.002	0.720±0.021	0.733±0.005	0.635±0.002	0.752±0.001
RTC	0.774±0.003	0.655±0.022	0.544±0.000	0.567±0.004	0.523±0.001	0.621±0.002
FeatConcate <sub>pCA</sub>	0.811±0.004	0.702±0.045	0.634±0.011	0.655±0.010	0.613±0.014	0.703±0.007
PCA+LRR	0.833±0.005	0.769±0.032	0.717±0.008	0.731±0.012	0.626±0.003	0.740±0.010
Co-Reg SPC	0.764±0.002	0.561±0.001	0.567±0.004	0.592±0.001	0.557±0.002	0.626±0.003
Min-Disagreement	0.788±0.003	0.660±0.053	0.598±0.006	0.620±0.004	0.580±0.006	0.667±0.002
ConvexReg SPC	0.814±0.024	0.692±0.046	0.648±0.056	0.667±0.050	0.623±0.072	0.721±0.034
RMSC	0.802±0.017	0.684±0.046	0.636±0.045	0.654±0.043	0.621±0.056	0.699±0.025
TMVSC-MCC	<b>0.903±0.000</b>	<b>0.782±0.000</b>	<b>0.758±0.000</b>	<b>0.772±0.000</b>	<b>0.665±0.000</b>	<b>0.920±0.000</b>

在大多数情况下, TMVSC-MCC 的性能优于其他方法,尤其是在扩展 YaleB、ORL 和 COIL-20 数据集上。表 5 中,在归一化互信息、准确度、调整后的兰德指数、F 分数、精确度和召回率方面,相较于第二好的 LRR 方法分别获得约 7.4%、2.1%、3.9%、3.8%、2.9%、16.9% 的改进。根据 4 种数据集聚类结果显示,直接将特征与主成分分析结合的方法 (FeatConcate<sub>pCA</sub>) 并不比最佳单视图方法 (LRR<sub>best</sub>) 的性能好,因此 FeatConcate<sub>pCA</sub> 方法不是有效的方法。注意到,除了基于扩展 YaleB 数据集上的自表示方法 (如 LRR) 外,大多数比较的其他方法性能相对较低,原因可能是光照变化大,导致不同视图特征提取不准确。而文中方法,通过相关熵来很好地平衡了不同视图的贡献程度,

能够更好的利用判别性较好的视图。

3.2 亲和矩阵展示

为更好地展示所提出方法的有效性,将 TMVSC-MCC 算法和 LRR 算法所生成的亲和矩阵进行比较,如图 3 所示。LRR 方法的亲和矩阵是通过独立构造不同视图的亲和矩阵后,将它们相加得到。好的亲和矩阵应在对角线处值最大,即对应的数据相似性最高,具有更好的块对角特性和更少的噪声。通过图 3 可以看出, TMVSC-MCC 的亲和矩阵更加清楚地揭示了潜在聚类结构,因为其利用张量地址约束,挖掘了视图间的高阶相关性,能够有效提高对多视图聚类效果。

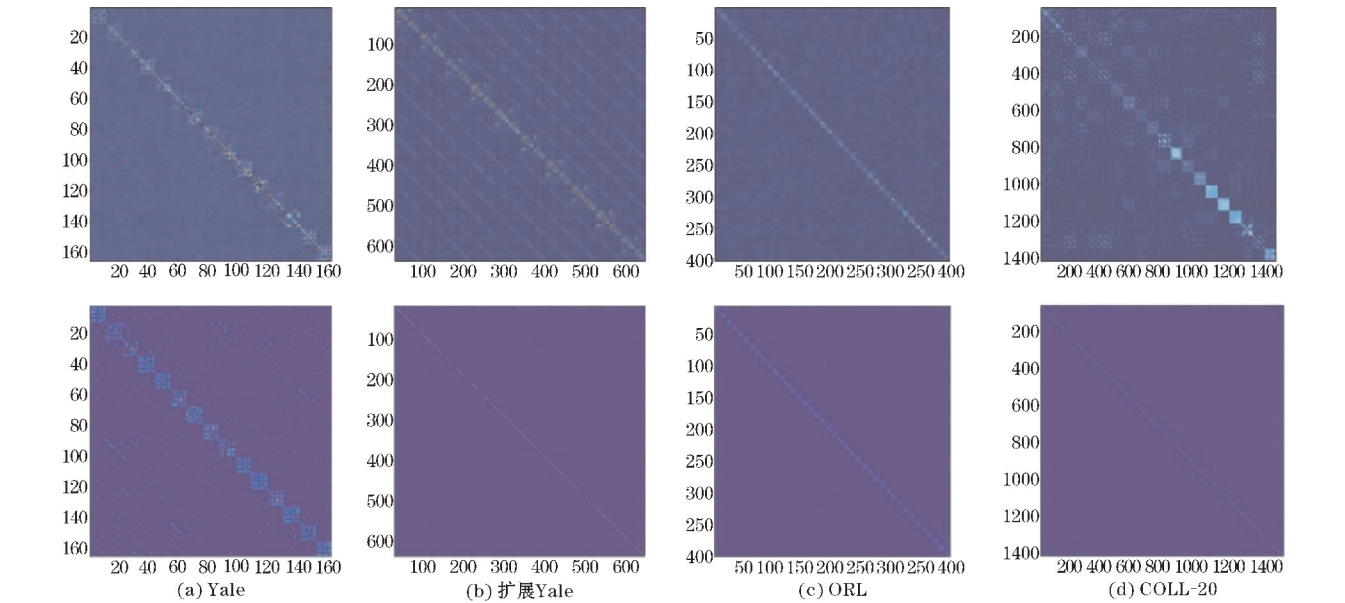
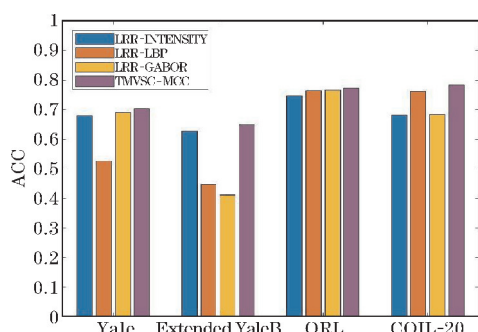


图 3 4 种数据集在 LRR (第一行) 和 TMVSC-MCC 算法 (第二行) 下的亲和矩阵图

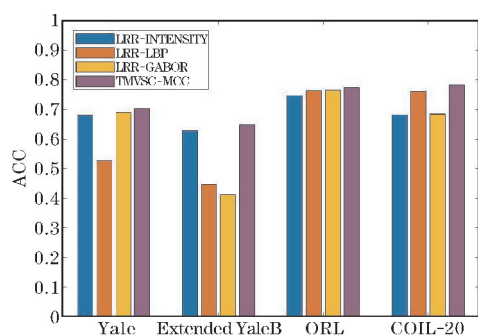
3.3 多视角融合有效性展示

为更直观地揭示本文所提出方法与多视角特征融合的有效性,将不同视图特征下 LRR 的聚类结果与融合多视图特征的 TMVSC-MCC 比较,结果如图 4 所示。具有不同特征的 LRR 在不同数据集上的性能存在加

大差异。特征 LBP 在 ORL 和 COIL-20 数据集上的性能很好,但在扩展 YaleB 数据集上的性能显著降低。如何选择视角使 LRR 获得最好的结果,很难把控。然而 TMVSC-MCC 直接采用所有特征,省去视角选择的难题,而最大相关熵准则能够对视角的判别性进行加权,自主选择出合适的视角,并获得更好的聚类结果。



(a) LRR 算法

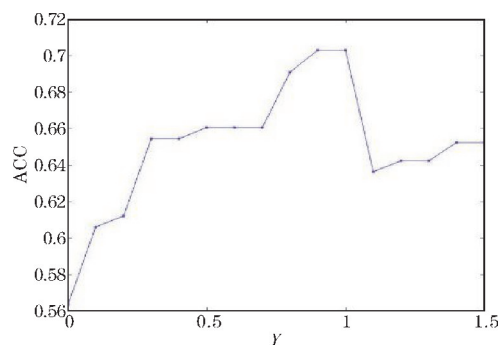


(b) TMVSC-MCC 算法

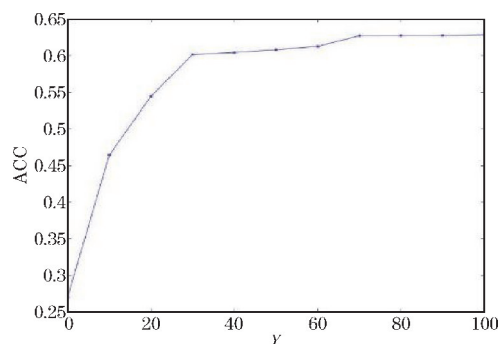
图4 4种数据集不同视图下的 ACC 值

### 3.4 参数敏感性展示

为展示算法对于参数的敏感性,将聚类结果与参数的关系在图5展示,设置  $g_1 = \dots = g_M = g$ , 因此只需要调整  $g$  值。可以看到扩展 YaleB 数据集的参数值明显大于 Yale 数据集的参数,因为扩展 YaleB 数据集对光照的变化更显著,因此要加强正则化来减轻光照的影响。



(a) Yale



(b) 扩展 Yale

图5 参数变化下 ACC 的值

## 4 结束语

开发了一种新的基于最大相关熵准则的张量多视图子空间聚类 (TMVSC-MCC) 算法。首先从给定的数据点学习每个子空间的表示矩阵,利用低维空间中的所有子空间表示矩阵构造一个三阶张量,然后采用张量核范数对张量施加低秩约束,最后对误差项进行最大相关熵处理,有效解决由误差项带来的问题。此外,提出基于块坐标下降算法来求解 TMVSC-MCC 的最优解。实验结果表明,与已有的方法相比,该方法在公共数据集上有较明显的优势。

## 参考文献:

- [1] Vidal R. Subspace clustering [J]. IEEE Signal Process, 2011, 28(2): 52-68.
- [2] Jia H, Ding S, Du M. A Nyström spectral clustering algorithm based on probability incremental sampling [J]. Soft Computing: A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications, 2017, 21(19): 5815-5827.
- [3] Ding S, Jia H, Du M, et al. A semi-supervised approximate spectral clustering algorithm based on HMRf model [J]. Information Sciences: An International Journal, 2018, 429(3): 215-228.
- [4] Ding S, Cong L, Hu Q, et al. A multiway p-spectral clustering algorithm [J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 164(1): 371-377.
- [5] Elhamifar E, Vidal R. Sparse subspace clustering: algorithm, theory, and applications [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 35(11): 2765-2781.
- [6] Liu G, Lin Z, Yan S, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171-184.
- [7] Vidal R, Favaro P. Low rank subspace clustering (LRSC) [J]. Pattern Recognition Letters, 2014, 43(1): 47-61.
- [8] Zhu W, Lu J, Zhou J. Nonlinear subspace clustering for image clustering [J]. Pattern Recognition Letters, 2018, 107(5): 131-136.
- [9] Xia R, Pan Y, Du L, et al. Robust multi-view spectral clustering via low-rank and sparse decomposition [C]. AAAI Conference on Artificial Intelligence. Québec, 2017: 2149-2155.
- [10] Zhang C, Fu H, Liu S, et al. Low-rank tensor constrained multiview subspace clustering [C]. IEEE International Conference on Computer Vision. Santiago, 2015: 1582-1590.
- [11] Cao X, Zhang C, Fu H, et al. Diversity induced multi-view subspace clustering [C]. IEEE Computer Vision and Pattern Recognition. Boston, 2015: 586-594.
- [12] Xie Y, Tao D, Zhang W, et al. On unifying multi-view self-representations for clustering by tensor



- multi-tank minimization[J]. International Journal of Computer Vision, 2018, 126(11): 1157–1179.
- [13] Wu J, Lin Z, Zha H. Essential tensor learning for multi-view spectral clustering[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2019, 28(12): 5910–5922.
- [14] Zhang C, Fu H, Wang J, et al. Tensorized multi-view subspace representation learning[J]. International Journal of Computer Vision, 2020, 128(8): 2344–2361.
- [15] Gao H, Nie F, Li X, et al. Multi-view subspace clustering[C]. IEEE International Conference on Computer Vision. Sanntiago, 2015: 4238–4246.
- [16] Li R, Zhang C, Hu Q, et al. Flexible multi-view representation learning for subspace clustering[C]. International Joint Conference on Artificial Intelligence, 2019.
- [17] Zhang C, Hu Q, Fu H, et al. Latent multi-view subspace clustering[C]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Hawaii, 2017: 4333–4341.
- [18] Misha E, Kilmer C, Martin D. Factorization strategies for thirdorder tensors[J]. Linear Algebra and its Applications, 2011, 435(3): 641–658.
- [19] Zhang Z, Ely G, Aeron S, et al. Novel methods for multilinear data completion and de-noising based on Tensor-SVD[C]. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus, 2014: 3842–3849.
- [20] Ng A Y, Jordan M I, Weiss Y. On spectral clustering: Analysis and an algorithm[C]. Conference and Workshop on Neural Information Processing Systems, 2001.
- [21] Liu J, Musialski P, Wonka P, et al. Tensor completion for estimating missing values in visual data[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 208–220.
- [22] Tomioka R, Hayashi K, Kashima H. Estimation of low-rank tensors via convex optimization[J/OL]. <https://10.48550/arXiv.1010.0789>, 2010–10–05.
- [23] DeL L, De M B, Vandewalle J. A multilinear singular value decomposition[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2000, 21(4): 1253–1278.
- [24] DeL L, De M B, Vandewalle J. On the best rank-1 and rank-( $r_1, r_2, \dots, r_n$ ) approximation of high-order tensors[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2000, 21(4): 1324–1342.
- [25] Zhou N, Chen B D, Du Y H, et al. Maximum correntropy criterion-based robust semisupervised concept factorization for image representation[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2020, 31(10): 3877–3891.
- [26] Rockafellar R T. Convex analysis[J/OL]. <https://press.princeton.edu/books/ebook/9781400873173>, 2015–04–29.
- [27] Xu Y, Yin W. A block coordinate descent method for regularized multiconvex optimization with applications to nonnegative tensor factorization and completion[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2013, 6(3): 1758–1789.
- [28] Lin Z, Liu R, Yan S, et al. Robust recovery of subspace structures by low-rank representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2013, 35(1): 171–184.
- [29] Cao X, Wei X, Han Y, et al. Robust tensor clustering with non-greedy maximization[C]. Association for the Advancement of Artificial Intelligence, 2013.
- [30] Chen Y, Tao C, Bai Q, et al. Short-term speed prediction for expressway considering adaptive selection of spatiotemporal dimensions and similar traffic features[J]. Journal of Transportation Engineering, 2020(10): 146.
- [31] Kumar A, Rai P, Daume H. Co-regularized multi-view spectral clustering[C]. Conference and Workshop on Neural Information Processing Systems, 2011.
- [32] Sa V. Spectral clustering with two views[C]. International Conference on Machine Learning, 2005.
- [33] Collins M D, Liu J, Xu J, et al. Spectral clustering with a convex regularizer on millions of images[C]. European Conference on Computer Vision, 2014.
- [34] Zhao Z, Yan S, Zhao M, et al. Robust bilinear matrix recovery by tensor low-rank representation[C]. IEEE International Joint Conference on Neural Networks, 2014.

## Tensor Multi-view Subspace Clustering via Maximum Correntropy Criterion

WU Xi<sup>1</sup>, DU Yuanhua<sup>1</sup>, ZHOU Nan<sup>2</sup>

(1. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China; 2. Chengdu University, Chengdu 610106, China)

**Abstract:** Multiple views can describe data information comprehensively and appropriately, which makes the research on multi-view subspace clustering (MVSC) algorithm more popular. This paper proposes a new multi-view subspace clustering algorithm, called tensor multi-view subspace clustering via maximum correntropy (TMVSC-MCC). Our method treats the subspace representation matrix of all views as a third-order tensor. By imposing low rank constraints on a tensor and introducing maximum correntropy criterion, the proposed model fully exploits high-order correlation information between views, and eliminates the impact of noise in multi-view data. Due to the non convexity, the accelerated block coordinate descent algorithm can solve the problem effectively. We make comparative experiments on four image datasets, and the results show that the proposed algorithm is superior to the other nine clustering algorithms.

**Keywords:** maximum correntropy criterion (MCC); tensor; multi-view; block coordinate descent; clustering