

# 饱和湿大气中惯性重力内波不稳定判据的探讨

吴洪<sup>1</sup>, 张昕<sup>1</sup>, 孙俊<sup>2</sup>

(1. 中国气象局气象干部培训学院, 北京 100081; 2. 中国气象局气象干部培训学院四川分院, 四川 成都 610071)

**摘要:**为分析饱和湿斜压大气中任意频率的惯性重力内波的稳定性, 利用非静力平衡 Boussinesq 近似的方程组, 在饱和湿斜压大气中考虑湿绝热过程, 着重分析讨论任意频率的惯性重力内波不稳定的充分条件(即判据), 主要得出: 当饱和湿斜压大气的位温经向梯度与饱和相当位温经向梯度之和大于零时, 波动不稳定的必要条件是波动向北倾斜; 反之, 波动不稳定的必要条件是波动向南倾斜。在基流、基本温度场分布不同的饱和湿斜压环境大气中, 任意频率惯性重力内波的不稳定判据呈多种不同的表达式, 变化复杂。一般情况下, 波动不稳定的充分条件即不稳定判据是饱和湿斜压环境大气不仅满足动热力参数  $\Delta$  大于零, 且波动等位相面的倾斜度必须位于与  $\Delta$  有关的两个参数值  $A_1$ 、 $A_2$  之间。当位温经向梯度与饱和假相当位温经向梯度的方向相反, 波动相对更稳定。如果惯性重力内波发生不稳定, 饱和湿斜压环境大气的等饱和相当位温面的倾斜度可能超过等绝对动量面的倾斜度, 也可能小于等绝对动量面的倾斜度。

**关键词:** 湿绝热过程; 惯性重力内波; 稳定性; 斜压

**中图分类号:** P433

**文献标志码:** A

**doi:** 10.16836/j.cnki.jcuit.2024.04.010

## 0 引言

惯性重力内波是大气中的一类特征波动, 常与暴雨、台风、强对流等天气有关<sup>[1-7]</sup>。陆汉城等<sup>[8]</sup>利用小扰动法得到描述中尺度运动的控制方程组, 再采用正交模方法获得惯性重力波的频率方程, 其频谱较广, 既包含频率高的波动, 也包含频率低的波动。进一步采用 Boussinesq 或滞弹性近似, 则获得频率低的如惯性重力内波的波动频率方程。

在均匀的基本气流背景下, 惯性重力内波的不稳定条件为  $K_h^2 N^2 + n^2 f_0^2 < 0$  ( $N^2 < 0$ ), 其中  $K_h^2 = k^2 + l^2$ ,  $K_h$ 、 $n$  分别表示水平波数、垂直波数,  $N^2 = g \frac{d \ln \bar{\theta}}{dz}$ ,  $f_0$  分别表示浮力振荡频率和地转参数<sup>[8-9]</sup>。刘式适等<sup>[9]</sup>得出, 在斜压大气中, 考虑基本气流既存在水平切变也存在垂直切变, 惯性重力内波不稳定的充分条件为  $\left[ f_0 \left( f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] / \left( -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) < \left( -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) / \left( \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)$ 。此判据的得出, 作了以下假设: 惯性重力内波以某一特殊倾斜角传播, 且波动的频率为最小。然而, 实际大气中所出现的惯性重力内波, 传播时的倾斜角度可以是任意的, 且波动具有比较宽的频谱, 频率并非都是最小的。

天气雷达、高分辨率气象卫星对中纬度锋面带状云系和降水的监测表明, 有时锋区/切变线附近的稳定性降水(层状云)中镶嵌有带状分布的对流性降水

(云), 但这些区域对流层低层/中层呈静力稳定或对流稳定的环境层结构<sup>[10-12]</sup>。惯性重力内波的不稳定发展可能形成对流性降水(云), 而上述惯性重力内波不稳定的充分条件, 并没有体现出饱和湿环境大气对波动不稳定判据的影响作用。

在饱和湿斜压大气状态下, 任意频率、任意倾斜角度传播的惯性重力内波的不稳定充分条件是什么? 为此, 本文从 Boussinesq 近似方程组出发, 在非静力平衡的饱和湿斜压环境大气中, 考虑湿绝热变化过程的作用, 利用正交模方法, 推导重力惯性内波的频散关系。着重分析饱和湿斜压环境大气中任意频率、任意倾斜角度传播的惯性重力内波的稳定性, 得到相应的不稳定判据。作为理论依据, 期望今后更可合理应用于中纬度带状云系和降水发生的成因(机理)研究和实际业务。

## 1 惯性重力内波的一般特征

### 1.1 频率方程

满足绝热、无摩擦、Boussinesq 近似的大气运动方程组为<sup>[8-9, 13-18]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_0 v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_0 u \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{g}{\theta_0} \theta' \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d\theta'}{dt} + w \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

其中,  $u, v, w$  表示空气块运动的  $x, y, z$  方向的速度分量;  $p$  是气压场,  $p'$  是相对基本状态气压场  $\bar{p}$  的偏差,  $p = \bar{p} + p'$ ;  $\rho$  为空气密度,  $\rho_0$  表示基本状态的空气密度的典型值, 为常数;  $\theta' = \theta - \bar{\theta}$ ,  $\theta'$  是相对基本状态的位温  $\bar{\theta}$  的偏差,  $\theta_0$  表示基本状态的位温的典型值, 为常数;  $f_0$  为地转参数, 在讨论惯性重力内波时可取常数。式(1)表明大气运动是非静力平衡的。

在大气运动中, 除水相变化引起的潜热释放之外, 不考虑其他非绝热过程, 则热力学方程表示为<sup>[9, 13-16]</sup>

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = -\frac{L}{c_p T} \frac{dq_s}{dt} \quad (2)$$

其中:  $T$  为气温,  $\theta$  为位温;  $q_s$  为气温为  $T$  时的饱和比湿;  $c_p, L$  分别为定压比热和凝结潜热。在饱和状态之下,  $\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \ll -\frac{1}{q_s} \frac{dq_s}{dt}$ , 因此在饱和湿绝热过程中, 气块的饱和相当位温守恒<sup>[9, 13-17, 19]</sup>

$$\frac{d \ln \theta_{se}}{dt} = 0 \quad (3)$$

其中饱和相当位温为  $\theta_{se} = \theta \exp\left(\frac{Lq_s}{c_p T}\right)$ 。

用式(3)替代方程组(1)中的第4式, 则方程组(1)改写为

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_0 v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - f_0 u \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{g}{\theta_0} \theta' \\ \frac{d\theta'_{se}}{dt} + w \frac{d\bar{\theta}_{se}}{dz} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\theta'_{se} = \theta_{se} - \bar{\theta}_{se}$ ,  $\theta'_{se}$  是相对基本状态的(假)相当位温  $\bar{\theta}_{se}$  的偏差,  $\bar{\theta}_{se0}$  表示基本状态的相当位温的典型值, 取为常数。这样, 方程组(4)成为在饱和大气中只有潜热释放这种湿绝热过程的运动方程组。

假定大气基本气流为纬向, 即  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (\bar{u}(y, z), 0, 0)$ , 且满足地转平衡  $\bar{u} = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\bar{p}}{\rho_0} \right)$  和热成风平衡  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$ <sup>[8, 20]</sup>。不失一般性, 假定扰动只在  $x-z$  平面内, 即与  $y$  无关。将方程组(4)线性化<sup>[8]</sup>:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) v' + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) = 0$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) - \frac{g}{\theta_0} \theta' = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta'_{se}}{\partial t} + v' \frac{\partial \bar{\theta}_{se}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}_{se}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\theta'_{se}}{\theta_0} \approx \frac{\theta'}{\theta_0}$$

令  $F^2 \equiv f_0 \left(f_0 - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)$ ,  $S^2 \equiv f_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ ,  $F^2$  为惯性振荡频率,  $S^2$  表示基本状态满足热成风平衡, 利用基本状态的热成风平衡关系可知,  $S^2 = -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$ 。方程组(5)即是在饱和湿斜压大气中考虑湿绝热过程、非静力平衡的描述非均匀基流惯性重力波的控制方程。

引入湿空气的层结稳定度<sup>[20]</sup>:

$$N_m^2 \equiv \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}_{se}}{\partial z} \quad (6)$$

令

$$S_m^2 \equiv -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}_{se}}{\partial y} \quad (7)$$

则方程组(5)改写为

$$\begin{aligned} f_0 \frac{\partial u'}{\partial t} - F^2 v' + S^2 w' &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + f_0 u' + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) &= 0 \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p'}{\rho_0} \right) - \frac{g}{\theta_0} \theta' &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{g}{\theta_0} \theta' \right) - S_m^2 v' + N_m^2 w' &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

因为 Boussinesq 近似的大气运动满足大气不可压缩性, 根据数学和流体力学的相关理论, 可引入流函数  $\psi$  表示扰动速度, 即  $v' \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ,  $w' \equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ 。

将用流函数表示的扰动速度代入方程组(8), 消去其他扰动量, 仅保留流函数, 得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + N_m^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + (S^2 + S_m^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} = 0 \quad (9)$$

对于“无界”大气, 可设波动的形式解为  $\Psi = Ae^{i(l y + m z - \omega t)}$ ,  $\omega, l, m$  分别表示惯性重力内波的频率、 $y$  方向的波数、 $z$  方向的波数。代入式(9)进一步运算得饱和湿斜压大气中惯性重力内波的频率方程:

$$\omega^2 = \frac{N_m^2 l^2 + F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2) l m}{l^2 + m^2} \quad (10)$$

由式(10)可知, 如果惯性重力内波只在  $y$  或  $z$  方向传

播,即  $m=0$  或  $l=0$ ,则式(10)变为浮力振荡或惯性振荡,显然式(10)作为饱和湿斜压大气中惯性重力内波的频率方程, $l, m$  均不等于零。

令  $K^2 = l^2 + m^2$ ,  $K$  表示二维波动的全波数,  $\vec{K} = l\vec{j} + m\vec{k}$  为二维波动的波矢量,即波动传播方向<sup>[9]</sup>。设波矢量  $\vec{K}$  与  $y$  轴的夹角为  $\varphi$ ,则

$$\sin\varphi = -\frac{m}{K}, \quad \cos\varphi = \frac{l}{K} \quad (11)$$

式(10)可改写为

$$\omega^2 = N_m^2 \cos^2\varphi + F^2 \sin^2\varphi + (S^2 + S_m^2) \sin\varphi \cos\varphi \quad (12)$$

令

$$b^2 = [(S^2 + S_m^2)^2 + (N_m^2 - F^2)^2], b > 0 \quad (13)$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{(S^2 + S_m^2)}{b} \quad (14)$$

$$\cos 2\varphi_0 = \frac{(N_m^2 - F^2)}{b}$$

由式(13)可知,  $b$  恒大于零。式(12)改写为

$$\omega^2 = \frac{1}{2} [(N_m^2 + F^2) + b \cos 2(\varphi - \varphi_0)] \quad (15)$$

一般情况,  $N_m^2 > 0$ 、 $F^2 > 0$ 。由式(15)可知,当  $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  时,惯性重力内波频率最小值:

$$\omega_{\min}^2 = \frac{1}{2} \{ (N_m^2 + F^2) - [(S^2 + S_m^2)^2 + (N_m^2 - F^2)^2]^{\frac{1}{2}} \} \quad (16)$$

当  $\varphi - \varphi_0 = 0$  时,惯性重力内波频率最大值:

$$\omega_{\max}^2 = \frac{1}{2} \{ (N_m^2 + F^2) + [(S^2 + S_m^2)^2 + (N_m^2 - F^2)^2]^{\frac{1}{2}} \} \quad (17)$$

## 1.2 相速与群速

由式(10),惯性重力内波的相速为

$$\vec{C} = \frac{\omega}{K^2} \vec{K} = \pm \frac{[N_m^2 l^2 + F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2) lm]^{\frac{1}{2}}}{(l^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} (l\vec{j} + m\vec{k}) \quad (18)$$

其中  $\vec{j}, \vec{k}$  分别表示  $y, z$  方向的单位矢。

波动的群速为

$$\vec{C}_g = C_{gy}\vec{j} + C_{gz}\vec{k}$$

$$C_{gy} = \pm \frac{m[(N_m^2 - F^2)lm - \frac{1}{2}(S^2 + S_m^2)(l^2 - m^2)]}{(l^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}[N_m^2 l^2 + F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2)lm]^{\frac{1}{2}}} \quad (19)$$

$$C_{gz} = \mp \frac{l[(N_m^2 - F^2)lm - \frac{1}{2}(S^2 + S_m^2)(l^2 - m^2)]}{(l^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}[N_m^2 l^2 + F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2)lm]^{\frac{1}{2}}}$$

由式(18)、(19)可得

$$\vec{C} \cdot \vec{C}_g = 0$$

在饱和湿斜压大气中,惯性重力内波的传播方向(相速度)与能量传播方向(群速度)相互垂直。

## 2 惯性重力内波稳定性判据

### 2.1 稳定性必要条件

令  $\varphi = ly + mz - \omega t$  表示波动的位相,当其等于常数时表示等位相面。则等位相面的倾斜度为

$$\tan\alpha = \frac{\Delta z}{\Delta y} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) / \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\frac{l}{m} \quad (20)$$

其中  $\alpha$  为等位相线(面)与  $y$  轴正向的夹角。

由重力波、惯性波发生的物理机制可知,一般  $N_m^2 l^2 + F^2 m^2 > 0$ 。由式(10)可知,当  $\omega^2 > 0$  时,惯性重力内波是稳定的;反之,惯性重力内波是不稳定的。因此,饱和湿斜压大气中的惯性重力内波不稳定的必要条件是

$$(S^2 + S_m^2)lm < 0 \quad (21)$$

在北半球一般环境大气的温度、湿度随纬度减小,  $S^2 > 0$ ,  $S_m^2 > 0$ 。惯性重力内波若要发生不稳定,  $\omega^2 < 0$ ,由式(21)可知,必须

$$lm < 0 \quad (22)$$

式(22)即是饱和湿斜压大气中惯性重力内波不稳定的必要条件。

由式(20)、(22)可知,不稳定的惯性重力内波的等位相面的倾斜度  $\tan\alpha > 0$ ,即  $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ ,等位相面向北倾斜(图1),波动向北(南)、向下(上)传播。当惯性重力内波的等位相面向南倾斜时,波动是稳定的。

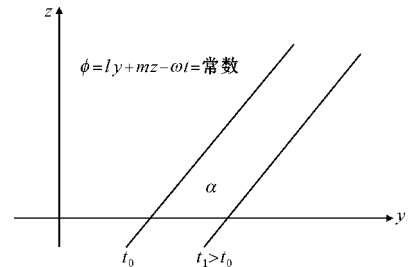


图1 等位相面示意图

当环境风场随高度减小时,在北半球  $S^2 < 0$ 。若此时  $S^2 + S_m^2 > 0$ ,惯性重力内波不稳定的必要条件仍为式(22);但若此时  $S^2 + S_m^2 < 0$  或环境的水汽随纬度增多时  $S_m^2 < 0$ ,惯性重力内波不稳定的必要条件为

$$lm > 0 \text{ 或 } \tan\alpha < 0 \quad (23)$$

式(23)表明,风速随高度减小且  $S^2 + S_m^2 < 0$  或  $S_m^2 < 0$  时,惯性重力内波不稳定的必要条件是等位相面向南倾斜,波动向北(南)、向上(下)传播。因此,饱和相当位温的经向梯度分布差异,对惯性重力内波不稳定必要条件的影响比较复杂,既可能使波动增稳,也可能使波动失稳。多普勒天气雷达监测表明,有时低空急流表

现出“轴状”的结构,其下风速随高度增大,而其上有限的层次内风速随高度减小,即实际大气中会出现风速随高度先增大后减小再增大的风场结构。因此,当风场呈这样的结构时,环境大气  $S^2 < 0$ 。

## 2.2 稳定性充分条件

由式(10)可知,饱和湿斜压大气中惯性重力内波不稳定的充分条件为

$$N_m^2 l^2 + F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2) l m < 0 \quad (24)$$

利用式(20),式(24)可改写为

$$N_m^2 \tan^2 \alpha - (S^2 + S_m^2) \tan \alpha + F^2 < 0 \quad m^2 \neq 0 \quad (25)$$

设环境大气的动热力参数:

$$\Delta = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2 \quad (26)$$

一般情况饱和湿斜压大气  $N_m^2 > 0$ 、 $F^2 > 0$ 。因而当  $\Delta > 0$  时,若

$$\frac{(S^2 + S_m^2) - \sqrt{\Delta}}{2N_m^2} < \tan \alpha < \frac{(S^2 + S_m^2) + \sqrt{\Delta}}{2N_m^2} \quad (27)$$

式(25)才能成立,即波动不稳定;当  $\Delta = 0$  或  $\Delta < 0$  时,式(25)均无解,即无论  $\tan \alpha$  为任何值,波动都是稳定的。

令

$$A_1 = \frac{(S^2 + S_m^2) - \sqrt{(S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2}}{2N_m^2} \quad (28)$$

$$A_2 = \frac{(S^2 + S_m^2) + \sqrt{(S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2}}{2N_m^2}$$

因此,在层结稳定、惯性稳定的饱和湿斜压大气中,惯性重力内波不稳定的充分条件是,环境大气满足  $\Delta = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2 > 0$  且波动等位相面的倾斜率满足  $A_1 < \tan \alpha < A_2$ 。

若  $S_m^2 = S^2$ ,则式(26)可改写为

$$\Delta^* \equiv S_m^4 - N_m^2 F^2 = S^4 - N_m^2 F^2 \quad (29)$$

当  $\Delta^* = S_m^4 - N_m^2 F^2 > 0$  时,若

$$\frac{S_m^2 - \sqrt{\Delta^*}}{N_m^2} < \tan \alpha < \frac{S_m^2 + \sqrt{\Delta^*}}{N_m^2} \quad (30)$$

式(25)才能成立,即波动不稳定;当  $\Delta^* = 0$  或  $\Delta^* < 0$  时,式(25)均无解,即无论  $\tan \alpha$  为任何值,波动都是稳定的。

若  $S^2$ 、 $S_m^2$  异号时,即位温经向梯度方向与饱和假相当位温经向梯度方向相反时,  $\Delta = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2$  更可能等于零或小于零,惯性重力内波相对更稳定。

如果  $S_m^2 > S^2 > 0$ ,对于不稳定的惯性重力内波,当  $\frac{S_m^2}{N_m^2} < \tan \alpha < \frac{(S^2 + S_m^2) + \sqrt{(S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2}}{2N_m^2}$  时,即波动等位相面的倾斜率大于环境大气的等饱和假相当位温面的倾斜率  $\frac{S_m^2}{N_m^2}$ ,  $\frac{S_m^2}{N_m^2} > \frac{F^2}{S^2}$ ,环境大气等饱和假相当位温面的倾

斜率大于等绝对动量面的;当  $\tan \alpha < \frac{(S^2 + S_m^2) + \sqrt{(S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2}}{2N_m^2} < \frac{S_m^2}{N_m^2}$  时,  $\frac{S_m^2}{N_m^2} < \frac{F^2}{S^2}$ ,环境大气等饱和假相当位温面的倾斜率小于等绝对动量面的;当  $\tan \alpha < \frac{S_m^2}{N_m^2} = \frac{(S^2 + S_m^2) + \sqrt{(S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2}}{2N_m^2}$  时,  $\frac{S_m^2}{N_m^2} = \frac{F^2}{S^2}$ ,环境大气等饱和假相当位温面的倾斜率等于等绝对动量面的。因此,波动位相的倾斜度大于等饱和假相当位温面的倾斜度,或者小于等绝对动量面的倾斜度,重力惯性内波仍可能会发生不稳定。在北半球急流轴北侧,惯性重力内波相对易发生不稳定;在急流轴南侧,惯性重力内波相对更稳定。

一般  $N_m^2 > 0$ 、 $F^2 > 0$ ,由式(15)可知,在饱和湿斜压大气中,当  $\varphi - \varphi_0 = 0$  时,惯性重力内波的频率最大,且波动恒稳定。对于任意频率的惯性重力内波,当  $-\frac{\pi}{4} \leq (\varphi - \varphi_0) \leq \frac{\pi}{4}$  时,  $\omega^2$  恒大于 0,即波动稳定。当  $\frac{\pi}{4} < (\varphi - \varphi_0) \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $\omega^2$  才有可能小于 0,即波动发生不稳定。当  $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,波动频率为最小值,若此时波动要发生不稳定,需  $(S^2 + S_m^2)^2 > 4N_m^2 F^2$ ,可见最小频率波动不稳定只是一个特例。应当注意的是,波动频率为最小时,不一定是  $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ 。

若环境大气是对流不稳定的层结,  $N_m^2 < 0$ ,则设

$$D^2 = -N_m^2 > 0$$

式(25)改写为

$$D^2 \tan^2 \alpha + (S^2 + S_m^2) \tan \alpha - F^2 > 0 \quad m^2 \neq 0 \quad (31)$$

令环境大气的新的动热力参数  $\bar{\Delta}$

$$\bar{\Delta} \equiv (S^2 + S_m^2)^2 + 4D^2 F^2 = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2 \quad (32)$$

当环境大气是惯性稳定的,  $F^2 > 0$ ,可知  $\bar{\Delta} = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2 > 0$ 。此时,若式(30)要成立,即惯性重力内波不稳定,必须是波动等位相线倾斜率  $\tan \alpha > \frac{-(S^2 + S_m^2) + \sqrt{\bar{\Delta}}}{-2N_m^2}$ ,或  $\tan \alpha < \frac{-(S^2 + S_m^2) - \sqrt{\bar{\Delta}}}{-2N_m^2}$ 。当环境大气是惯性不稳定的,  $F^2 < 0$ ,若  $\bar{\Delta} = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2 > 0$ ,则惯性重力内波不稳定的充分条件依然是  $\tan \alpha > \frac{-(S^2 + S_m^2) + \sqrt{\bar{\Delta}}}{-2N_m^2}$ ,或  $\tan \alpha < \frac{-(S^2 + S_m^2) - \sqrt{\bar{\Delta}}}{-2N_m^2}$ ;若  $\bar{\Delta} = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2 = 0$ ,惯性重力内波不稳定的充分条件是  $\tan \alpha \neq \frac{(S^2 + S_m^2)}{2N_m^2}$ ;若  $\bar{\Delta} = (S^2 + S_m^2)^2 - 4N_m^2 F^2 < 0$ ,无论波动的等位相面的倾斜度如何,波动都将是不稳定的。可



见,不稳定的饱和湿斜压环境大气,可能先发生对流,然后积雨云所激发的惯性重力内波,其稳定性非常复杂,可能发生稳定,也可能发生不稳定。

若环境大气是对流中性层结,  $N_m^2 \equiv 0$ , 则惯性重力内波变为纯惯性内波,其稳定性的判据为

$$F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2) lm \begin{cases} > 0 & \text{稳定} \\ < 0 & \text{不稳定} \end{cases} \quad (33)$$

可知基流的切变,既可以使纯惯性内波增稳,也可以使其失稳。

一般  $F^2 > 0$ 。若  $S^2, S_m^2$  同号,当  $S^2 > 0, S_m^2 > 0$  时,等位相面向北倾的波动易满足  $F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2) lm < 0$ ; 或当  $S^2 < 0, S_m^2 < 0$  时,向南倾的波动也易满足  $F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2) lm < 0$ , 即惯性波易发生不稳定。若  $S^2, S_m^2$  异号,无论等位相面向北或向南倾斜,波动易满足  $F^2 m^2 + (S^2 + S_m^2) lm > 0$ 。可见基流的垂直切变、饱和大气的湿绝热过程,既可以有利纯惯性内波增稳,也可以有利其失稳。

若不考虑基流的垂直切变,  $S^2 \equiv 0$ , 表示环境大气是正压的或正好位于饱和湿斜压大气急流轴上,则  $\Delta = S_m^4 - 4N_m^2 F^2$ 。这样,在层结稳定  $N_m^2 > 0$ 、惯性稳定  $F^2 > 0$  的情况下,惯性重力内波不稳定的充分条件为  $S_m^4 - 4N_m^2 F^2 > 0$ , 且  $\frac{S_m^2 - \sqrt{S_m^4 - 4N_m^2 F^2}}{2N_m^2} < \text{tg}\alpha < \frac{S_m^2 + \sqrt{S_m^4 - 4N_m^2 F^2}}{2N_m^2}$ 。

若不考虑基流的水平切变,  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \equiv 0$ , 此时惯性重力内波的频率方程的形式类似于式(10),只是用  $f_0$  替代  $F^2$ 。有关这种情况下惯性重力内波稳定性的判据,类似于前述讨论。

若不考虑地球自转作用,  $F^2 \equiv 0$ , 则惯性重力内波变为纯重力内波,其稳定性的判据为

$$N_m^2 l^2 + (S^2 + S_m^2) lm \begin{cases} > 0 & \text{稳定} \\ < 0 & \text{不稳定} \end{cases} \quad (34)$$

一般  $N_m^2 > 0$ 。若  $S^2, S_m^2$  同号,当  $S^2 > 0, S_m^2 > 0$  时,等位相面向北倾的波动易满足  $N_m^2 l^2 + (S^2 + S_m^2) lm < 0$ ; 或当  $S^2 < 0, S_m^2 < 0$  时,向南倾的波动也易满足  $N_m^2 l^2 + (S^2 + S_m^2) lm < 0$ , 即惯性波易发生不稳定。若  $S^2, S_m^2$  异号,无论等位相面向北或向南倾斜,波动易满足  $N_m^2 l^2 + (S^2 + S_m^2) lm < 0$ 。可见知基流的垂直切变、饱和大气的湿绝热过程,既可以有利纯重力内波增稳,也可以有利其失稳。

### 3 结论

利用无摩擦、Boussinesq 近似的大气运动方程组,考虑湿绝热过程的影响,采用小扰动法和正交模法,得到饱和湿斜压大气中惯性重力内波的频率方程,着重分析讨论任意频率惯性重力内波的稳定性。主要结论

如下:

(1) 若  $-\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}_{se}}{\partial y} > 0$ , 不稳定的必要条件是波动的等位相面(线)向北倾斜。若  $-\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}_{se}}{\partial y} < 0$ , 波动不稳定的必要条件是波动的等位相面(线)向南倾斜。

(2) 若大气是对流稳定、惯性稳定,惯性重力内波不稳定的充分条件则是环境大气满足  $\Delta > 0$ , 且波动等位相面的倾斜度大于  $A_1$  小于  $A_2$ 。

(3) 在层结稳定、惯性稳定的饱和湿斜压环境大气中,若  $-\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}_{se}}{\partial y} > (-\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}) > 0$ , 对于不稳定的惯性重力内波,当环境大气的等饱和假相当位温面的倾斜率小于  $A_2$  时,其大于等绝对动量面的倾斜率;当环境大气的等饱和假相当位温面的倾斜率大于  $A_2$  时,其小于等绝对动量面的倾斜率;当环境大气的等饱和假相当位温面的倾斜率等于  $A_2$  时,其等于等绝对动量面的倾斜率。

(4) 当饱和湿斜压大气是对流不稳定时,若惯性稳定,惯性重力内波不稳定的充分条件是  $\Delta > 0$ , 且波动等位相面的倾斜度  $\text{tg}\alpha < A_1$  或  $\text{tg}\alpha > A_2$ 。

(5) 若饱和湿斜压大气是对流不稳定、惯性不稳定时,惯性重力内波不稳定的充分条件分别是  $\Delta > 0$ , 且波动等位相面的倾斜度  $\text{tg}\alpha < A_1$  或  $\text{tg}\alpha > A_2$ ; 或  $\Delta = 0$ , 且波动等位相面的倾斜度  $\text{tg}\alpha \neq \frac{(S^2 + S_m^2)}{2N_m^2}$ ; 或  $\Delta < 0$ 。

可见,在基流、基本温度场分布不同的饱和湿斜压环境大气中,任意频率惯性重力内波的不稳定判据呈多种不同的表达式,相当复杂。湿绝热过程对惯性重力内波稳定性的影响,可能有利于波动不稳定,也可能有利于波动稳定。

本文只是从理论上讨论饱和湿斜压大气中惯性重力内波的不稳定性判据,在实际中如何应用,乃是今后进一步研究工作的方向。

### 参考文献:

- [1] 胡伯威,梅雨锋上 MCS 的发展、传播以及与低层“湿度锋”相关联的 CISK 惯性重力波[J]. 大气科学,2005,29(6):845-853.
- [2] 康建伟,陆汉城,钟科,等. 台风内部的中尺度波动与多边形眼墙的形成[J]. 热带气象学报,2007,23(1):21-26.
- [3] 覃卫坚,寿绍文,高守亭,等. 一次冰雹过程的惯性重力波观测及数值模拟[J]. 地球物理学报,2010,53(5):1039-1049.

- [4] 赵玉春,王叶红,崔春光. 一次典型梅雨锋暴雨过程的多尺度结构特征[J]. 大气科学学报, 2011, 34(1): 14-27.
- [5] 李永平,郑运霞,方平治. 2009年“莫拉克”台风登陆过程阵风特征分析[J]. 气象学报, 2012, 70(6): 1188-1199.
- [6] 孙继松,何娜,郭锐,等. 多单体雷暴的形变与列车效应传播机制[J]. 大气科学, 2013, 37(1): 137-148.
- [7] 吴海英,曾明剑,蒋义芳,等. 一次雷暴过程中对流系统演变特征的模拟分析[J]. 高原气象, 2021, 40(3): 569-579.
- [8] 陆汉城,杨国祥. 中尺度天气原理和预报[M]. 北京:气象出版社, 2004: 1-40.
- [9] 刘式适,刘式达. 大气动力学[M]. 北京:北京大学出版社, 1991: 1-527.
- [10] Wang Pengyun, Xu Zixiu, Pan Zaitao. A case study of warm sector rainbands in North China [J]. Advances in Atmospheric Sciences, 1990, 7(3): 354-365.
- [11] Shou Shaowen, Li Yaohui. Study on Moist Potential Vorticity and Symmetric Instability during a Heavy Rain Event Occurred in the Jiang-Huai Valleys [J]. Advances in Atmospheric Sciences, 1999, 16(2): 314-321.
- [12] Market P S, Cissell D. Formation of a sharp snow gradient in a Midwestern Heavy snow event [J]. Weather and Forecasting, 2002, 17(4): 723-738.
- [13] Holton J R, Hakim G J. 动力气象学引论[M]. 北京:电子工业出版社, 2019: 1-227.
- [14] 伍荣生,党人庆,余志豪,等. 动力气象学[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1983: 1-114.
- [15] 李崇银,刘式适,陈嘉滨,等. 动力气象学引论[M]. 北京:气象出版社, 2005: 1-114.
- [16] 吕美仲,侯志明,周毅. 动力气象学[M]. 北京:气象出版社, 2004: 1-347.
- [17] 贺海晏,简茂球,乔云亭. 动力气象学[M]. 北京:气象出版社, 2010: 1-228.
- [18] 李国平. 新编动力气象学[M]. 北京:气象出版社, 2014: 1-254.
- [19] 吴国雄,蔡雅萍,唐晓菁. 湿位涡和倾斜涡度发展[J]. 气象学报, 1995, 53(4): 387-405.
- [20] D. A. Bennetts, B. J. Hoskins. Conditional symmetric instability-a Possible Explanation for frontal rainbands [J]. Quart. J. of the Royal Meteorological Society, 1979, 105: 945-962.

## Research on the Unstable Criterion about the Internal Inertial Gravity Wave with any Frequency in the Saturated Atmosphere

WU Hong<sup>1</sup>, ZHANG Xin<sup>1</sup>, SUN Jun<sup>2</sup>

(1. China Meteorological Administration Training Center, Beijing 100081, China; 2. Sichuan Sub-Center of China Meteorological Administration Training Center, Chengdu 610071, China)

**Abstract:** This study investigates the stability conditions for internal inertial gravity waves in a saturated baroclinic atmosphere. The analysis focuses on the instability criteria, using equations based on the Boussinesq approximation, non-hydrostatic balance, and moist adiabatic processes. The main results show that if the sum is greater than zero of the latitudinal gradient of the field about the potential temperature and the one of the field about the saturated potential pseudo-equivalent temperature, the necessary condition of the instability is that the slope of the constant phase line of wave is slant towards north. If the sum is less than zero, the necessary condition of the instability is that the slope of the constant phase line of the wave is a slant towards south. There are so many different and rather complicated formulas of the unstable criterion about the wave in the saturated baroclinic atmosphere. In general, it must be the sufficient condition of the instability about the internal inertial gravity wave that not only the dynamical and thermal parameter  $\Delta$  is greater than zero about the saturated baroclinic atmosphere, but also the slope of the phase line about the wave must be greater the  $A_1$  and less than  $A_2$  which are relative to the  $\Delta$ . While the direction of the gradient of the field of saturation equivalent potential temperature is the opposite of the gradient of the field of potential temperature, there is stable more easily about the internal inertial gravity wave. If the wave is unstable, the slope of the isoline of saturation equivalent potential temperature may be more vertical than or less vertical than one of the isolines of absolute momentum.

**Keywords:** saturation adiabatic process; internal gravity wave; stability; baroclinic