

时滞四元数忆阻神经网络的投影同步控制

郭俊¹, 程滢朝², 石艳超², 王长有¹

(1. 成都信息工程大学应用数学学院, 四川 成都 610225; 2. 西南石油大学理学院, 四川 成都 610500)

摘要: 利用改进的1-范数和直接解析法, 研究具有时变时滞四元数忆阻神经网络模型的投影同步控制问题。通过设计一种新型控制器, 构造合适的李雅普诺夫函数和运用一些不等式技巧, 建立新的投影同步条件, 实现四元数忆阻神经网络的投影同步。最后, 通过数值仿真验证该方法的可行性。

关键词: 四元数神经网络; 忆阻; 投影同步; 1-范数

中图分类号: O175

文献标志码: A

doi: 10.16836/j.cnki.jcuit.2024.04.015

0 引言

近年来有关实值神经网络和复值神经网络同步性的研究较多^[1-7], 而对四元数域的研究相对较少。四元数是爱尔兰数学家哈密尔顿在1843年提出的一个数学概念。与实数和复数相比, 四元数在乘法运算上不具有可交换性。因此, 在四元数提出的最初阶段, 其研究几乎处于停滞状态。随着现代数学的发展, 四元数在数字图像处理中有广阔的应用前景^[8], 在航空航天工业技术^[9]、人工智能^[10]、量子力学^[11]等领域, 取得了一些成果。特别是在三维和四维空间的数据建模和处理方面具有广阔的应用前景和优势, 因此, 关于四元数及其应用的研究越来越引起注意。

忆阻作为与电容、电阻和电感并列的第4种基本电子元件, 最早由Chua^[12]于1971年提出。限于当时纳米技术远未成熟, 忆阻的物理实现极其困难, 因此, 忆阻的研究一直未能取得重大突破。直到2008年, 惠普公司的Strukov等^[13]实验室证实并成功研发了忆阻, 自此, 忆阻的性质及其应用的研究引起了广泛关注。最近一些研究证实了忆阻具有模拟大脑突触的功能^[14-16], 基于忆阻神经网络深刻地揭示了大脑的工作机制, 所以, 四元数忆阻神经网络引起了研究人员的极大兴趣^[17-22]。

文献[17]运用向量排序法, 讨论了时滞四元数忆阻神经网络解的存在性及其指数稳定性; 文献[18]探讨了分数阶四元数忆阻模糊神经网络解, 存在性、唯一性及其全局渐近稳定性等动力学属性; 文献[19]用非

线性标量函数和Lyapunov泛函, 给出了分数阶四元数模糊忆阻神经网络, 若干改进的无源性和耗散性准则; 文献[20]研究了具有离散和分布时滞四元数神经网络的有限时间同步问题; 文献[21]探讨了基于四元数变时滞忆阻神经网络的固定时间同步问题; 文献[22]给出了四元数忆阻神经网络周期解存在的充分条件。

目前关于四元数忆阻神经网络的投影同步的研究较少, 因此, 本文主要探讨时滞四元数忆阻神经网络的投影同步问题。与已有采用将四元数分解的方法来研究同步问题不同, 本文利用改进的1-范数, 用直接解析法研究投影同步问题, 该方法更为简洁且易于实现。

1 预备知识和建立模型

本文设 \mathbb{R} 、 \mathbb{Q} 分别表示实数集和四元数集, $co(A)$ 表示 A 的凸包闭包, \mathbf{x}^T , \mathbf{x} 和 \mathbf{x}^* 分别表示向量 \mathbf{x} 的转置向量、共轭向量和共轭转置向量, $\|\mathbf{x}\|_1$ 表示向量 \mathbf{x} 的1-范数。

1个四元数由1个实部和3个虚部构成, 如 $q \in \mathbb{Q}$, $q = q^R + iq^I + jq^J + kq^K$, $q^R, q^I, q^J, q^K \in \mathbb{R}$ 。虚部 i, j, k 满足Hamilton准则, 即:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

由此可知, 对任意2个四元数 $h, q \in \mathbb{Q}$, $h = h^R + ih^I + jh^J + kh^K$, $q = q^R + iq^I + jq^J + kq^K$, 其乘法运算如下:

$$\begin{aligned}hq = & (h^R q^R - ih^I q^I - jh^J q^J - kh^K q^K) + \\ & (h^R q^I + h^I q^R + h^J q^K - h^K q^J)i + \\ & (h^R q^J + h^I q^R + h^K q^I - h^J q^K)j + \\ & (h^R q^K + h^I q^J + h^J q^I - h^K q^I)k\end{aligned}$$

根据上述运算可知, 四元数乘法不满足交换律即 $hq \neq qh$ 。

本文中四元数的1-范数为

收稿日期: 2023-04-08

基金项目: 国家自然科学基金青年基金资助项目(61703354); 四川省国家应用数学合作建设资助项目(2022ZX004); 中央引导地方科技发展资金面上资助项目(22ZYYS0065)

通信作者: 郭俊. E-mail: junguo0407@cuit.edu.cn

$\|q\|_1 = \sum_{\pi=R,I,J,K} \|q^\pi\| \ (q^\pi \in \mathbb{R}, \pi=R,I,J,K)$
 q 的共轭转置 $\bar{q} = q^R - iq^I - jq^J - kq^K$, q 的共轭转置示为
 $q^* = (q^R - iq^I - jq^J - kq^K)^T$.

考虑如下变时滞四元数忆阻神经网络模型:

$$\begin{aligned} \dot{m}_q(t) = & -c_q m_q(t) + \sum_{s=1}^n b_{qs}(m_q(t)) f_s(m_s(t)) + \\ & \sum_{s=1}^n d_{qs}(m_q(t)) f_s(m_s(t-\tau(t))) + I_q \\ & t \geq 0, q=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $m_q(t) \in \mathbb{Q}$ 表示第 q 个神经元在 t 时刻的状态向量, $f_q(\cdot) \in \mathbb{C}$ 表示第 q 个神经元的激活函数, $c_q > 0$ 是自反馈连接权值, $\tau(t)$ 是传输延迟, 满足 $0 \leq \tau(t) \leq \tau$ ($\tau \geq 0$), 且 I_q 表示神经网络的外部输入, $b_{qs}(m_q(t))$, $d_{qs}(m_q(t)) \in \mathbb{Q}$ 表示关于神经元变量 $m_q(t)$ 的内部忆阻连接权值, 其定义:

$$\begin{aligned} b_{qs}(m_q(t)) = & \begin{cases} \bar{b}_{qs}, & |m_q(t)| \geq T_q \\ \hat{b}_{qs}, & |m_q(t)| < T_q \end{cases} \\ d_{qs}(m_q(t)) = & \begin{cases} \bar{d}_{qs}, & |m_q(t)| \geq T_q \\ \hat{d}_{qs}, & |m_q(t)| < T_q \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $T_q > 0$ 为切换参数, $\bar{b}_{qs}, \hat{b}_{qs}, \bar{d}_{qs}, \hat{d}_{qs}$ 为复数, $q, s=1, 2, \dots, n$. 系统(1)的初始条件:

$$m_q(t) = \psi_q(t) \in C([- \tau, 0]; \mathbb{Q}^n), q=1, 2, \dots, n$$

定义 1^[23] 对任意 $N \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ 中的偏序关系定义为

$$(1) \mu \prec \nu \Leftrightarrow \nu - \mu \in N$$

$$(2) \mu \prec \nu \Leftrightarrow \nu - \mu \in \text{int } N$$

其中 $\text{int } N$ 是 N 的内部。

注 四元数可以看成 1 个二维向量, 因此, 可以用广义不等式来比较 2 个四元数的大小, 即如果 N 代表复平面的第一象限或第四象限, 那么它右边的任何一个四元数都比它大, 而一个四元数右上角的一个四元数也严格地比它大。

应用微分包含理论和集值映射理论, 四元数忆阻神经网络系统(1)可以写为

$$\begin{aligned} \dot{m}_q(t) \in & -c_q m_q(t) + \sum_{s=1}^n co(b_{qs}^-, b_{qs}^+) f_s(m_s(t)) + \\ & \sum_{s=1}^n co(d_{qs}^-, d_{qs}^+) f_s(m_s(t-\tau(t))) + I_q, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $b_{qs}^- = \min\{\hat{b}_{qs}, \bar{b}_{qs}\}$, $b_{qs}^+ = \max\{\hat{b}_{qs}, \bar{b}_{qs}\}$, $d_{qs}^- = \min\{\hat{d}_{qs}, \bar{d}_{qs}\}$, $d_{qs}^+ = \max\{\hat{d}_{qs}, \bar{d}_{qs}\}$, 且

$$co(b_{qs}^-, b_{qs}^+) = \begin{cases} \bar{b}_{qs}, & |m_q(t)| < T_q \\ [b_{qs}^-, b_{qs}^+], & |m_q(t)| = T_q, \\ \hat{b}_{qs}, & |m_q(t)| > T_q \end{cases}$$

$$co(d_{qs}^-, d_{qs}^+) = \begin{cases} \bar{d}_{qs}, & |m_q(t)| < T_q \\ [d_{qs}^-, d_{qs}^+], & |m_q(t)| = T_q \\ \hat{d}_{qs}, & |m_q(t)| > T_q \end{cases}$$

微分包含意味着存在 $\bar{b}_{qs}(t) \in co(b_{qs}^-, b_{qs}^+)$, $\bar{d}_{qs}(t) \in co(d_{qs}^-, d_{qs}^+)$ 使:

$$\begin{aligned} \dot{m}_q(t) = & -c_q m_q(t) + \sum_{s=1}^n \bar{b}_{qs}(t) f_s(m_s(t)) + \\ & \sum_{s=1}^n \bar{d}_{qs}(t) f_s(m_s(t-\tau(t))) + I_q, t \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

若将系统(1)看作驱动系统, 则相应的响应系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{n}_q(t) = & -c_q n_q(t) + \sum_{s=1}^n b_{qs}(n_q(t)) f_s(n_s(t)) + \\ & \sum_{s=1}^n d_{qs}(n_q(t)) f_s(n_s(t-\tau(t))) + I_q + u_q(t), t \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $n_q(t) \in \mathbb{Q}$ 表示第 q 个神经元在 t 时刻的状态向量, $u_q(t)$ 是要设计的控制器。系统(4)的初始条件为 $n_q(t) = \varphi_q(t) \in C([- \tau, 0]; \mathbb{Q}^n)$, 类似地, 响应系统(4)可以等价地写为

$$\begin{aligned} \dot{n}_q(t) = & -c_q n_q(t) + \sum_{s=1}^n \bar{b}'_{qs}(t) f_s(n_s(t)) + \\ & \sum_{s=1}^n \bar{d}'_{qs}(t) f_s(n_s(t-\tau(t))) + I_q + u_q(t), t \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\bar{b}'_{qs}(t) \in co(b_{qs}^-, b_{qs}^+)$, $\bar{d}'_{qs}(t) \in co(d_{qs}^-, d_{qs}^+)$ 。

定义 2^[3] 驱动系统(1)与响应系统(4)达到投影同步, 如果对任意 $t \geq 0$ 都有:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|n(t) - \beta m(t)\| = 0$$

其中 $n(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_n(t))^T$, $m(t) = (m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t))^T \in \mathbb{Q}$, β 为投影因子。

注 当投影因子 $\beta = 1$ 时, 系统(1)和(4)达到完全同步; 当 $\beta = -1$ 时, 则系统达到反同步; 当 $\beta = \alpha$ ($\alpha \neq 1, -1$), 则达到一般的投影同步。

为讨论需要, 将符号函数引入改进的四元数 1-范数中来。

定义 3^[20] 四元数 m 的符号函数定义为

$$\text{sgn}(m) = \text{sgn}(m^R) + i \text{sgn}(m^I) + j \text{sgn}(m^J) + k \text{sgn}(m^K).$$

注 由于实数 m 的绝对值可写为 $|m| = \text{sgn}(m)m$, 类似的复数 $m = m^R + im^I$ ($m^R, m^I \in \mathbb{R}$) 的 1-范数可以表示为

$$\begin{aligned} \|m\|_1 = & \|m^R\|_1 + \|m^I\|_1 = \text{sgn}(m^R)^T m^R + \text{sgn}(m^I)^T m^I \\ = & 1/2 (\text{sgn}(m)^* m + m^* \text{sgn}(m)) \end{aligned}$$

假设(H)对任意四元数 m, n , 存在正常数 l_s 使下面的式子成立

$$\|f_s(m) - f_s(n)\|_1 \leq l_s \|m - n\|_1$$

引理 1^[24] 当 $t \in (-\tau, +\infty)$ 时, 非负函数 $V(t)$ 满

足以下不等式:

$$D^+V(t) \leq -\eta V(t) + \xi V(t-\tau(t))$$

其中 $t > 0, \eta, \xi$ 是正常数, 且 $\eta > \xi > 0$, 则有

$$V(t) \leq \sup_{-\tau \leq s \leq 0} V(s) e^{-\eta t}$$

其中 r 是方程 $r = \eta - \xi e^{-r\tau}$ 的正解。

引理 2^[20] 假设 $m(t) = m^R(t) + im^I(t) + jm^J(t) + km^K(t)$, $n(t) = n^R(t) + in^I(t) + jn^J(t) + kn^K(t) \in \mathbb{Q}$, 则有
下列公式成立:

- (i) $m(t)^* \operatorname{sgn}(n(t)) + \operatorname{sgn}(n(t))^* m(t) \leq m(t)^* \operatorname{sgn}(m(t)) + \operatorname{sgn}(m(t))^* m(t) = 2 \|m(t)\|_1$;
- (ii) $D^+(m(t)^* \operatorname{sgn}(m(t)) + \operatorname{sgn}(m(t))^* m(t)) = \operatorname{sgn}(m(t))^* \dot{m}(t) + \dot{m}(t) \operatorname{sgn}(m(t))$;
- (iii) $\operatorname{sgn}(m(t))^* \operatorname{sgn}(m(t)) = \|\operatorname{sgn}(m(t))\|_1$.

2 主要结果

通过设计有效的控制器, 给出四元数忆阻神经网络即驱动系统(1)和响应系统(4)的投影同步准则。

定理 1 在假设(H)的条件下, 如果以下条件成立。

$$c_q + k_q - \sum_{s=1}^n l_s \|\tilde{b}'_{qs}(t)\|_1 > \sum_{s=1}^n l_s \|\tilde{d}'_{qs}(t)\|_1 > 0$$

则驱动系统(1)和响应系统(4)达到投影同步。其中控制器如下:

$$\begin{aligned} u_q(t) = & \beta \sum_{s=1}^n \tilde{b}_{qs}(t) f_s(m_s(t)) - \sum_{s=1}^n \tilde{b}'_{qs}(t) f_s(\beta m_s(t)) + \\ & \beta \sum_{s=1}^n \tilde{d}_{qs}(t) f_s(m_s(t-\tau(t))) - \sum_{s=1}^n \tilde{d}'_{qs}(t) f_s(\beta m_s(t-\tau(t))) + \\ & (\beta-1) I_q - k_q (\beta n_q(t) - m_q(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

证明 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n (\operatorname{sgn}(e_q(t))^* e_q(t) + e_q(t)^* \operatorname{sgn}(e_q(t))) \quad (7)$$

由驱动系统(1)和响应系统(4), 得误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}_q(t) = & -c_q e_q(t) + \sum_{s=1}^n \tilde{b}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(e_s(t)) + \\ & \sum_{s=1}^n \tilde{d}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(e_s(t-\tau(t))) - k_q e_q(t) \end{aligned} \quad (8)$$

计算 $V(t)$ 的右上 Dini 导数 $D^+V(t)$:

$$\begin{aligned} D^+V(t) = & \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n (\operatorname{sgn}(e_q(t))^* \dot{e}_q(t) + \dot{e}_q(t)^* \operatorname{sgn}(e_q(t))) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n (\operatorname{sgn}(e_q(t))^* (-c_q e_q(t) - k_q e_q(t) + \sum_{s=1}^n \tilde{b}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(m_s(t) \\ & (t)) + \sum_{s=1}^n \tilde{d}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(m_s(t-\tau(t)))) + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n ((-c_q e_q(t) - \\ & k_q e_q(t) + \sum_{s=1}^n \tilde{b}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(m_s(t)) + \sum_{s=1}^n \tilde{d}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(m_s(t-\tau(t))))^* \operatorname{sgn}(e_q(t))) \end{aligned} \quad (9)$$

分析式(9)中的项可以得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^n c_q [\operatorname{sgn}(e_q(t))^* e_q(t) + e_q(t)^* \operatorname{sgn}(e_q(t))] - \\ & \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n k_q [\operatorname{sgn}(e_q(t))^* e_q(t) + e_q(t)^* \operatorname{sgn}(e_q(t))] \\ = & -\sum_{q=1}^n (c_q + k_q) \|e_q(t)\|_1 \end{aligned} \quad (10)$$

根据引理 2 得到以下不等式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n (\operatorname{sgn}(e_q(t))^* \tilde{b}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(e_s(t)) + \tilde{f}_s(e_s(t))^* \cdot \\ & \tilde{b}'_{qs}(t)^* \operatorname{sgn}(e_q(t))) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n \|\tilde{b}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(e_s(t))\|_1 \leq \|\tilde{b}'_{qs}(t)\|_1 l_s \|e_s(t)\|_1, \\ & \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n (\operatorname{sgn}(e_q(t))^* \tilde{d}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(e_s(t-\tau(t))) + \tilde{f}_s(e_s(t-\tau(t)))^* \cdot \\ & \tilde{d}'_{qs}(t)^* \operatorname{sgn}(e_q(t))) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n \|\tilde{d}'_{qs}(t) \tilde{f}_s(e_s(t-\tau(t)))\|_1 \leq \|\tilde{d}'_{qs}(t)\|_1 l_s \|e_s(t-\tau(t))\|_1. \end{aligned}$$

结合式(10)~(12)得

$$\begin{aligned} D^+V(t) \leq & -\sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n (c_q + k_q - l_s \|\tilde{b}'_{qs}(t)\|_1) \|e_q(t)\|_1 + \\ & \sum_{q=1}^n \sum_{s=1}^n l_s \|\tilde{d}'_{qs}(t)\|_1 \|e_q(t-\tau(t))\|_1 \end{aligned} \quad (13)$$

和

$$D^+V(t) \leq -\eta V(t) + \xi V(t-\tau(t)) \quad (14)$$

根据定理 1 和引理 1 得到

$$V(t) \leq \sup_{-\tau \leq s \leq 0} V(s) e^{-\eta t} \quad (15)$$

其中 r 是方程 $r = \eta - \xi e^{-r\tau}$ 的正解。

由定义 2 可知驱动系统(1)和响应系统(4)达到投影同步, 证毕。

3 数值模拟

考虑如下四元数忆阻神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{m}_1(t) = -c_1 m_1(t) + \sum_{s=1}^2 b_{1s}(m_1(t)) f_s(m_s(t)) + \\ \quad \sum_{s=1}^2 d_{1s}(m_1(t)) f_s(m_s(t-\tau(t))) + I_1 \\ \dot{m}_2(t) = -c_2 m_2(t) + \sum_{s=1}^2 b_{2s}(m_2(t)) f_s(m_s(t)) + \\ \quad \sum_{s=1}^2 d_{2s}(m_2(t)) f_s(m_s(t-\tau(t))) + I_2 \end{cases} \quad (16)$$

基于忆阻的权值为

$$\begin{aligned} b_{11}(m_1(t)) = & \begin{cases} 2.3-1.6i+2.0j-1.5k, & |m_1(t)| < 1 \\ 2.0-2.7i+2.0j-2.5k, & |m_1(t)| \geq 1 \end{cases} \\ b_{12}(m_1(t)) = & \begin{cases} -0.5-0.4i-0.5j-1.6k, & |m_1(t)| < 1 \\ -0.1-0.9i-0.1j-0.6k, & |m_1(t)| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_{21}(m_2(t)) = \begin{cases} 1.1+0.7i+1.0j+0.6k, & |m_2(t)| < 1 \\ 1.6-0.3i+1.5j-0.4k, & |m_2(t)| \geq 1 \end{cases}$$
$$b_{22}(m_2(t)) = \begin{cases} -1.2-0.3i-0.7j-0.3k, & |m_2(t)| < 1 \\ -0.8-0.1i-1.3j-0.2k, & |m_2(t)| \geq 1 \end{cases}$$
$$d_{11}(m_1(t)) = \begin{cases} -1.4+3.1i-1.4j+3.0k, & |m_1(t)| < 1 \\ -1.5+2.6i-1.5j+2.3k, & |m_1(t)| \geq 1 \end{cases}$$
$$d_{12}(m_1(t)) = \begin{cases} -0.5-1.5i-0.5j-1.6k, & |m_1(t)| < 1 \\ -0.1-0.9i-0.1j-0.6k, & |m_1(t)| \geq 1 \end{cases}$$
$$d_{21}(m_2(t)) = \begin{cases} -0.8-0.2i-0.6j-0.1k, & |m_2(t)| < 1 \\ -1.2-1.1i-1.3j-1.3k, & |m_2(t)| \geq 1 \end{cases}$$
$$d_{22}(m_2(t)) = \begin{cases} 0.5-0.8i+0.4j-0.7k, & |m_2(t)| < 1 \\ 1.3-0.5i+1.2j-0.4k, & |m_2(t)| \geq 1 \end{cases}$$

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{n}_1(t) = -c_1 n_1(t) + \sum_{s=1}^2 b_{1s}(n_1(t)) f_s(n_s(t)) + \\ \sum_{s=1}^2 d_{1s}(n_1(t)) f_s(n_s(t-\tau(t))) + I_1 \\ \dot{n}_2(t) = -c_2 n_2(t) + \sum_{s=1}^2 b_{2s}(n_2(t)) f_s(n_s(t)) + \\ \sum_{s=1}^2 d_{2s}(n_2(t)) f_s(n_s(t-\tau(t))) + I_2 \end{cases} \quad (17)$$

取时滞 $\tau(t) = 0.75 - 0.25\cos(t)$, 使 $\tau = 1$. 激活函数 $f(m_q(t)) = 0.23(|m_q^R(t)+1|-|m_q^R(t)-1|)+0.23\times(|m_q^I(t)+1|-|m_q^I(t)-1|)i+0.23(|m_q^J(t)+1|-|m_q^J(t)-1|)j+0.23(|m_q^K(t)+1|-|m_q^K(t)-1|)k$ 外部输入 $I_1=I_2=0$. 根据假设 (H) 知 $l_1=l_2=1.84$. 选取控制增益 $k_1=k_2=48$, 连接权值为 $c_1=c_2=1$.

根据上述参数计算得:

$$c_1+k_1-\sum_{s=1}^2 l_s \parallel \tilde{b}'_{1s}(t) \parallel_1 = 26.552$$
$$> \sum_{s=1}^2 l_s \parallel \tilde{d}'_{2s}(t) \parallel_1 = 23.92 > 0$$
$$c_2+k_2-\sum_{s=1}^2 l_s \parallel \tilde{b}'_{2s}(t) \parallel_1 = 37.408$$
$$> \sum_{s=1}^2 l_s \parallel \tilde{d}'_{2s}(t) \parallel_1 = 15.272 > 0$$

满足定理 1 中的条件, 系统 (16) 和 (17) 达到投影同步.

仿真数值中, 系统的初值分别取为

$$\psi_1(s) = 0.2-0.8i, \psi_2(s) = 0.5-0.5i, \varphi_1(s) = 2.5+2i,$$
$$\varphi_1(s) = 2.5+2i, \varphi_2(s) = -2.3+3i, s \in [-1, 0]$$

图 1、5、7 分别描述了在控制器 (6) 下 $\beta=2、-1、1$ 时的误差轨迹; 图 2、3 分别描述了在控制器 (6) 下 $\beta=2$ 时 $m^R(t)、n^R(t)、m^I(t)、n^I(t)$ 和 $m^J(t)、n^J(t)、m^K(t)、n^K(t)$ 的状态轨迹; 图 4、6、8 分别描述了没有控制器的情况下 $\beta=2、-1、1$ 的误差轨迹.

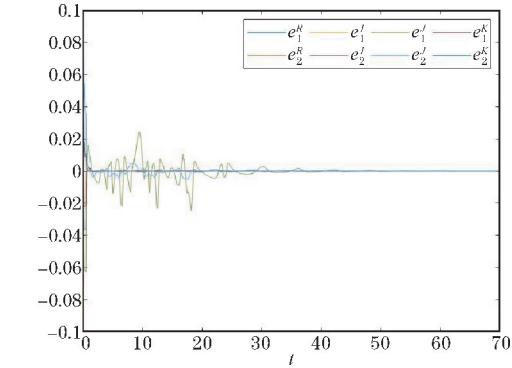


图 1 在控制器 (6) 下 $\beta=2$ 时的误差轨迹

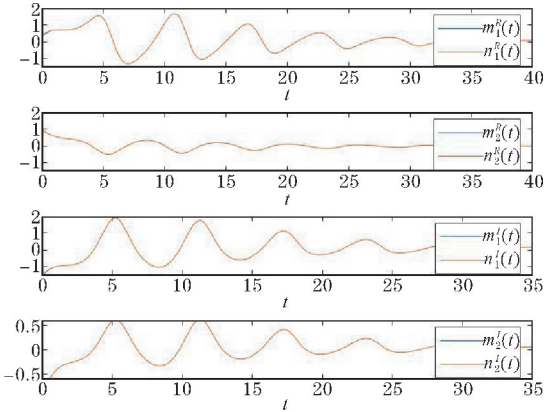


图 2 在控制器 (6) 下 $\beta=2$ 时 $m^R(t)、n^R(t)、m^I(t)、n^I(t)$ 的状态轨迹

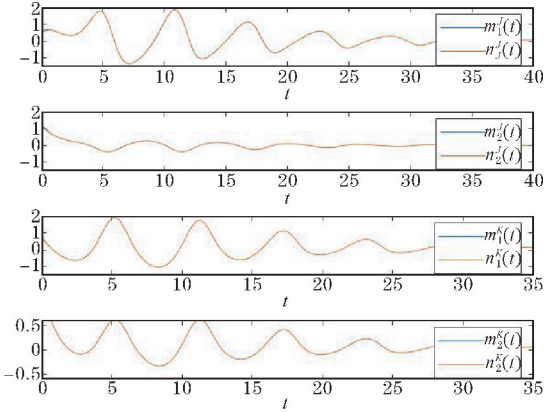


图 3 在控制器 (6) 下 $\beta=2$ 时 $m^J(t)、n^J(t)、m^K(t)、n^K(t)$ 的状态轨迹

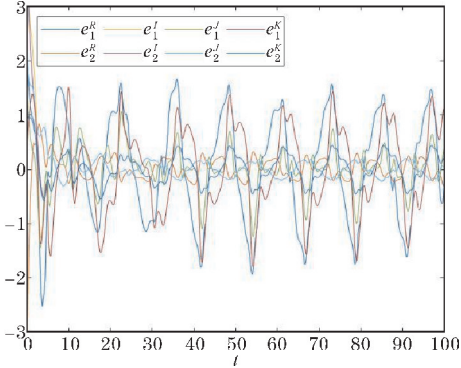
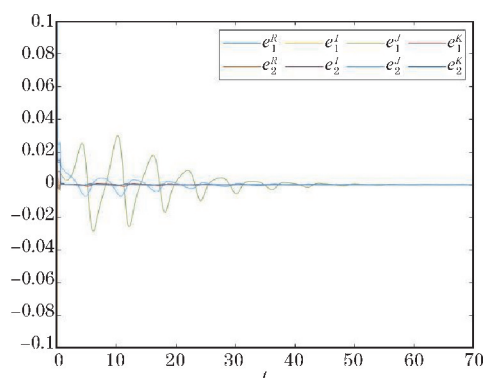
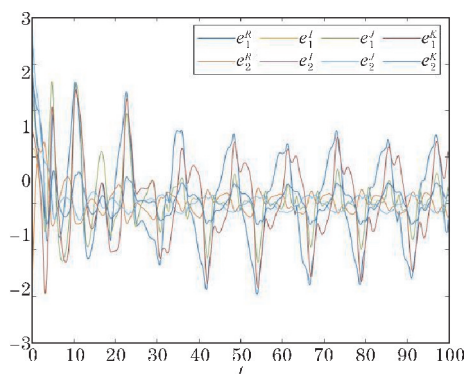
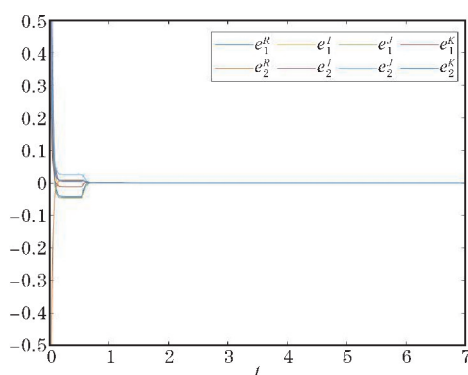
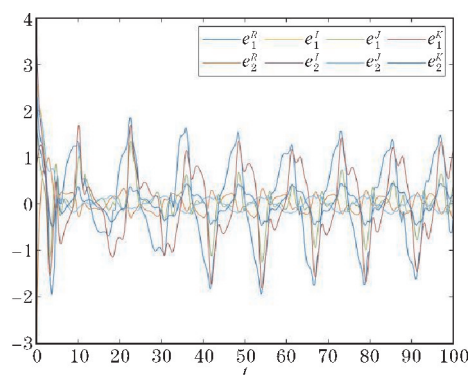


图 4 在无控制器下 $\beta=2$ 时的误差轨迹

图5 在控制器(6)下 $\beta=-1$ 时的误差轨迹图6 在无控制器下 $\beta=-1$ 时的误差轨迹图7 在控制器(6)下 $\beta=1$ 时的误差轨迹图8 在无控制器下 $\beta=1$ 时的误差轨迹

由仿真结果可以看出本文得到的同步标准可以实现完全同步、反同步和一般投影同步,因此本文的结果具有一般性和代表性。

4 结束语

分析了具有时变时滞的四元数忆阻神经网络的投影同步问题。与已有的采用分解法不同的是本文通过改进的1-范数和直接解析法来研究同步问题。本文方法不仅简单且易于实现。在数值模拟中,选取投影同步因子 $\beta=2, -1, 1$,驱动系统和响应系统都实现了同步。因此,本文讨论的同步具有更强的通用性和实用性。未来将继续研究四元数神经网络的同步问题,并且研究此方法是否适用于其他神经网络模型。

致谢:感谢成都信息工程大学科研启动项目(KYTZ202184)、创新项目(KYQN202324)、创新团队项目(KYD202243)和创新团队重点项目(KYTD202226)对本文的资助

参考文献:

- [1] Li N, Cao J. Lag Synchronization of Memristor-Coupled Neural Networks via omega-Measure [J]. IEEE transactions on neural networks and learning systems, 2015, 27(3): 686-697.
- [2] Xie D, Jiang Y, Han M. Global exponential synchronization of complex-valued neural networks with time delays via matrix measure method [J]. Neural Processing Letters, 2019, 49(1): 187-201.
- [3] Ding D, Yao X, Zhang H. Complex projection synchronization of fractional-order complex-valued memristive neural networks with multiple delays [J]. Neural Processing Letters, 2020, 51(1): 325-345.
- [4] Yu T, Cao J, Rutkowski L, et al. Finite-time synchronization of complex-valued memristive-based neural networks via hybrid control [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(8): 3938-3947.
- [5] Wang C, Yang Q, Zhuo Y, et al. Synchronization analysis of a fractional-order non-autonomous neural network with time delay [J]. Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications, 2020, 549.
- [6] Jia L, Wang C, Lei Z. Synchronization of nonautonomous neural networks with Caputo derivative and time delay [J]. Networks and Heterogeneous Media, 2023, 18(1): 341-358.
- [7] Jia L, Lei Z, Wang C, et al. Projection synchronization of functional fractional-order neural networks with variable coefficients [J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2023, 13(2): 1070-1087.
- [8] Hua L, Qiang Y, Gu J, et al. Mechanical fault diagnosis using color image recognition of vibration spectrogram based on quaternion invariable mo-

- ment [J]. Mathematical problems in engineering, 2015, 702760.
- [9] Goodman R. Digital simulation of aerospace vehicle flight path dynamics using quaternions [C]. In Prague International Astronautical Federation Congress, 1977.
- [10] 赵玮,任凤丽. 基于自适应控制的四元数时滞神经网络的有限时间同步[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(1): 94–103.
- [11] Hasan M, Mandal B. New scattering features of quaternionic point interaction in non-Hermitian quantum mechanics [J]. Journal of Mathematical Physics, 2020, 61(3): 032104.
- [12] Chua L O. Memristor-the missing circuit element [J]. IEEE Transactions on Circuit Theory, 1971, CT-18(5): 507–519.
- [13] Strukov D, Snider G, Stewart D, et al. The missing memristor found [J]. Nature, 2008, 453(7191): 80–83.
- [14] Jo S, Chang T, Ebong I, et al. Nanoscale memristor device as synapse in neuromorphic systems [J]. Nano Letters, 2008, 10(4): 1297–1301.
- [15] Wang Z, Xu H, Li X, et al. Synaptic learning and memory functions achieved using oxygen ion migration/diffusion in an amorphous InGaZnO memristor [J]. Advanced Functional Materials, 2012, 22(13): 2759–2765.
- [16] Li Y, Zhong Y, Xu L, et al. Ultrafast synaptic events in a chalcogenide memristor [J]. Scientific Reports, 2013, 3: 1–7.
- [17] Li R, Gao X, Cao J, et al. Exponential Stabilization Control of Delayed Quaternion-Valued Memristive Neural Networks: Vector Ordering Approach [J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2020, 39: 1353–1371.
- [18] Wei H, Li R, Wu W. Dynamic analysis of fractional-order quaternion-valued fuzzy memristive neural networks: Vector ordering approach [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 411: 1–24.
- [19] Li R X, Cao J D. Passivity and Dissipativity of Fractional-Order Quaternion-Valued Fuzzy Memristive Neural Networks: Nonlinear Scalarization Approach [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(5): 2821–2832.
- [20] Peng T, Qiu J, Lu J, et al. Finite-time and fixed-time synchronization of quaternion-valued neural networks with/without mixed delays: An improved one-norm method [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(12): 7475–7487.
- [21] Chen D, Zhang W, Cao J, et al. Fixed time synchronization of delayed quaternion-valued memristor-based neural networks [J]. Advances in Difference Equations, 2020, (1): 1–16.
- [22] Liu W, Huang J, Yao Q. Stability analysis for quaternion-valued inertial memristor-based neural networks with time delays [J]. Neurocomputing, 2021, 448: 67–81.
- [23] Li R, Gao X, Cao J. Quasi-state estimation and quasi-synchronization control of quaternion-valued fractional-order fuzzy memristive neural networks: Vector ordering approach [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 362: 124572.
- [24] Wei H, Wu B, Tu Z. Exponential synchronization and state estimation of inertial quaternion-valued Cohen-Grossberg neural networks: Lexicographical order method [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(6): 2171–2185.

Projective Synchronization of Quaternion-valued Memristor based Neural Networks with Time-varying Delays

GUO Jun¹, CHENG Yanzhao², SHI Yanchao², WANG Changyou¹

(1. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China; 2. School of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China)

Abstract: This paper presents a direct analytical method to investigate synchronization problems by introducing an enhanced one-norm. A novel controller is designed to achieve the control goal. By employing the Lyapunov function and some inequality techniques, the new synchronization condition is established, and the projection synchronization of quaternion-valued memristor-based neural network is realized. Finally, the feasibility of the proposed method is verified by numerical simulation.

Keywords: quaternion-valued neural networks; memristor; projective synchronization; one-norm