文章编号：2096-1618(2024)04-0494-05

几个单 K_3-群的一个新刻画

兰 林[1]， 韩章家[1]， 石化国[2]

(1. 成都信息工程大学应用数学学院，四川 成都 610225；2. 四川职业技术学院教师教育学院，四川 遂宁 629000)

摘要：设 G 是有限群，$\pi(G)$ 为 G 的阶的素因子的集合，p_m 为 $\pi(G)$ 的最大元。$\pi_{p_m}(G)$ 表示群 G 的 p_m 阶元中心化子的阶的集合。利用群的偶阶分量与集合 $\pi_{p_m}(G)$ 给出了单 K_3-群的一个数量刻画。

关 键 词：有限群；偶阶分量；中心化子

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A

doi：10.16836/j.cnki.jcuit.2024.04.016

0 引言

本文所提到的群都是有限群，有限群的阶以及其元素的阶与群的结构有着极其紧密的联系，Thompson 著名的奇阶群可解定理就是一个很明显的例证。另一方面，自 20 世纪 80 年代有限单群分类定理宣告完成之后，利用有限单群的数量关系来刻画有限单群成为有限群的一个很重要的研究课题。

设 G 是有限群，G 的素图 $\Gamma(G)$：G 的顶点集为 $|G|$ 的全部素因子的集合，2 个顶点 p 与 q 相邻当且仅当 G 中有 pq 阶元[1]。G 的素图连通分支的个数记为 $t(G)$，G 的素图中连通分支的集合记为 $T(G)=\{\pi_i(G)\mid i=1,2,\cdots,t(G)\}$。当 G 为偶阶群时，约定 $2\in\pi_1(G)$。若 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{t(G)}$ 是 G 的素图的全部连通分支，则 $|G|=m_1m_2\cdots m_{t(G)}$，其中 m_i 的素因子集 $\pi(m_i)=\pi_i$，$i=1,2,\cdots,t(G)$，称 $m_1,m_2,\cdots,m_{t(G)}$ 为 G 的阶分量，并记 $OC(G)=\{m_1,m_2,\cdots,m_{t(G)}\}$ 为群 G 的阶分量的集合[2]，为方便，记群 G 的偶阶分量为 $m_1(G)$。Chen G Y[2] 给出了素图不连通的所有单群的阶分量。利用阶分量的概念研究如下问题：

设 G 是一个有限群，S 是一个非交换单群。如果 $OC(G)=OC(S)$，那么 G 与 S 是否同构。不少群论学者深入研究过这一问题，成果可见文献[2-13]。从这些结果来看，阶分量是刻画单群有效的数量性质。

1962 年，在 Amsterdam 世界数学家大会上，著名群论学家 R Brauer 提出了利用对合的中心化子作为有限单群的标记，之后群论学家们在研究过程中发现有时还有必要考察奇阶元的中心化子，由此可以看出，元素的中心化子的性质对有限单群有着很大的影响。

基于上述，本文将阶分量和中心化子对单群结构有影响的概念结合，利用偶阶分量和某些奇阶元中心化子的数量性质来刻画部分单 K_3-群。

1 主要引理

文中约定：$\pi(G)$ 表示 G 的阶的素因子的集合；p_m 为 $\pi(G)$ 的最大元，$\pi_{p_m}(G)$ 表示群 G 的 p_m 阶元中心化子阶的集合；$|\pi(G)|$ 表示 G 的阶的素因子的个数。对于 $p_i\in\pi(G)$，S_{p_i} 表示 G 的 Sylow p_i-子群。其余未经声明的符号是标准的，见文献[14]。

下面的结论给出了当 $t(G)\geqslant 2$ 时有限群的结构。

引理 1[1]　设 G 是有限群，G 的素图不连通，则 G 的结构如下：

(1) G 是 Frobenius 群或 2-Frobenius 群；

(2) G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，且 H 是幂零 $\pi_1(G)$-群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群且 $|(G/K)|\,\big|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。

注 1　设 G 是有限群，G 称为 2-Frobenius 群，如果 G 有一个正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使得 G/H 和 K 是以 K/H 和 H 为核的 Frobenius 群[5]。

下面的 2 个引理分别给出了偶阶 Frobenius 群和偶阶 2-Frobenius 群的结构。

引理 2[15]　设 G 是偶阶 Frobenius 群，H 是 Frobenius 核，K 是 Frobenius 补，则 $t(G)=2$，$T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$，且 G 的结构为下列之一：

(1) 若 $2\in\pi(H)$，则 K 的 Sylow 子群循环；

(2) 若 $2\in\pi(K)$，则 H 是交换群，当 K 可解时，K 的奇阶 Sylow 子群循环，Sylow 2-子群为循环群或广义四元数群；当 K 不可解时，存在 $K_0\leqslant K$ 使 $|K:K_0|\leqslant 2$，且 $K_0\simeq Z\times \mathrm{SL}(2,5)$，$(|Z|,30)=1$，其中 Z 的 Sylow 子群循环。

收稿日期：2023-03-23
基金项目：国家自然科学基金资助项目(12061030)
通信作者：韩章家. E-mail：hzjmm11@163.com

引理 3[15]　设 G 是偶阶 2-Frobenius 群，则 $t(G)=2$，G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使 $\pi(K/H)=\pi_2(G)$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$，$|G/K|\mid|\mathrm{Aut}(K/H)|$，$G/K$ 和 K/H 均为循环群。特别地，$|G/K|<|K/H|$，G 可解。

2　主要定理及其证明

设 K 是群 G 的子群，则显然有 $m_1(k)\mid m_1(G)$，在以下证明过程中，符号 $A_5(2^2\times3\times5)$ 表示群 A_5 的阶为 $2^2\times3\times5$。

D Gorenstein 称群阶的不同素因子个数为 3 的有限单群为单 K_3-群，M Herzog[16] 给出了全部的单 K_3-群，它们分别是：A_5，A_6，$L_2(7)$，$L_2(8)$，$L_2(17)$，$U_4(2)$，$L_3(3)$ 及 $U_3(3)$。

定理 1　设 G 是有限群，M 是单 K_3-群 $U_4(2)$，$L_3(3)$ 及 $L_2(17)$ 之一，则 $G\cong M$ 当且仅当：

（1）$m_1(G)=m_1(M)$；

（2）$\pi_{p_m}(G)=\pi_{p_m}(M)$。

证明　因定理的必要性是显然的，只需证明充分性即可，分 4 种情况来证明。

情形 1　$M\cong U_4(2)(2^6\times3^4\times5)$。

此时 $m_1(G)=m_1(M)=2^6\times3^4$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{5\}$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^6\times3^4$，故 $t(G)\geqslant2$，从而由引理 1 可知 G 的结构如下：

（1）G 是 Frobenius 群或 2-Frobenius 群；

（2）G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，且 H 是幂零 $\pi_1(G)$-群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群。

但 G 不可能是 Frobenius 群。否则 $G=HK$，其中 H 是 Frobenius 核，K 是 Frobenius 补，$T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

若 $2\in\pi(H)$，则 $\pi(H)=\pi_1(G)$。因 H 为幂零群，故 $H=S_2\times S_3$，$S_i\in \mathrm{Syl}_i(H)$，$i=2,3$，且 $S_i\trianglelefteq G$，从而有 $|K|\mid|\mathrm{Aut}(S_2)|$。但由于 $5\mid|K|$，而 $|\mathrm{Aut}(S_2)|\mid|(2^6-1)(2^6-2)(2^6-4)(2^6-8)(2^6-16)(2^6-32)|$，矛盾。

若 $2\in\pi(K)$，则由条件 G 的 Sylow 5-子群 S_5 正规于 G 且其阶为 5。将 G 的 Sylow 3-子群作用于 S_5 便可得 G 含 15 阶元，与 $\pi_{p_m}(M)=\{5\}$ 矛盾。故 G 不是 Frobenius 群。

G 也不是 2-Frobenius 群，否则 $t(G)=2$ 且 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使 $\pi(K/H)=\pi_2(G)$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^6\times3^4$，故 $5\in\pi_2(G)$，从而 K 中含 5 阶元。如果 $2\notin\pi(H)$ 且 $3^4\mid|H|$，那么由条件 $m_1(G)=m_1(M)=2^6\times3^4$ 和 $\pi_{p_m}(M)=\{5\}$ 就可得 $|G/K|=2^6$ 且 $|K|=5$。于是由引理 3 也可得 $2^6\mid|\mathrm{Aut}(K/H)|=4$，矛盾。如果 $2\notin\pi(H)$ 且 $3^4\nmid|H|$，那么将 K 的 5 阶元作用于 H 的 Sylow 3-子群就可得到矛盾。如果 $2\in\pi(H)$，那么将 K 的 5 阶元作用于 H 的 Sylow 2-子群就可得到矛盾。故 G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 的结构如引理 1（2），即 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使 $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$，$H$ 是幂零群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^6\times3^4$，$t(G)\geqslant2$，从而 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3\}$，$5\in\pi(K/H)$。若 H 非平凡，则 $3^4\nmid|H|$，否则 K/H 的阶最多含两个素因子，它不可能是非交换单群。不妨设 $H=S_2\times S_3$，$S_i\in\mathrm{Syl}_i(H)$，$i=2,3$，由于 H 是幂零群，故 $S_i\trianglelefteq G$，$i=2,3$。将 K 的 5 阶元作用于 S_i 就可得 $\pi_{p_m}(M)\neq\{5\}$，矛盾，于是有 $H=1$。

这样 G 有正规非交换单子群 K，使 $\pi(G/K)\in\pi_1(G)=\{2,3\}$，$5\in\pi(K)$。依假设 $|\pi(K)|=3$，即 K 为单 K_3-群，由文献［16］可知 K 只能是下列群之一：A_5，A_6，$U_4(2)$。

如果 $K\cong A_5$，则 $|K|=(2^2\times3^3\times5)$。由于 $m_1(G)=2^6\times3^4$，$m_1(K)=2^2$，固有 $2^4\times3^4\mid|(G/K)|\mid|\mathrm{Out}(A_5)|=2$，矛盾，从而 $K\ncong A_5$。同理 $K\ncong A_6$。

于是有 $K\cong U_4(2)$，从而 $1\trianglelefteq U4(2)\trianglelefteq G$，此时显然有 $C_G(U_4(2))=1$，又 $\mathrm{Out}(U_4(2))=2$，于是就有 $G\cong U_4(2)$ 或者 $G\cong\mathrm{Aut}(U_4(2))$。如果 $G\cong\mathrm{Aut}(U_4(2))$，那么显然 $m_1(G)>m_1(U_4(2))=m_1(M)$，与假设矛盾，于是 $G\cong U_4(2)$。

情形 2　$M\cong L_3(3)(2^4\times3^3\times13)$。

此时 $m_1(G)=m_1(M)=2^4\times3^3$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{13\}$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^4\times3^3$，故 $t(G)\geqslant2$，从而由引理 1 可知 G 的结构如下：

（1）G 是 Frobenius 群或 2-Frobenius 群；

（2）G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，且 H 是幂零 $\pi_1(G)$-群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群。

但 G 不可能是 Frobenius 群。否则 $G=HK$，其中 H 是 Frobenius 核，K 是 Frobenius 补，$T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

若 $2\in\pi(H)$，则 $\pi(H)=\pi_1(G)$。因 H 为幂零群，故 $H=S_2\times S_3$，且 $S_i\trianglelefteq G$，这里 $S_i\in\mathrm{Syl}_i(H)$，$i=2,3$，从而有 $|K|\mid|\mathrm{Aut}(S_2)|$。但由于 $13\mid|K|$，而 $|\mathrm{Aut}(S_2)|\mid|(2^4-1)(2^4-2)(2^4-4)(2^4-8)|$，矛盾，故 G 不可能是 Frobenius 群。

若 $2\in\pi(K)$，则由条件 G 的 Sylow 13-子群 S_{13} 正规于 G 且其阶 13。将 G 的 Sylow 3-子群作用于 S_{13} 便

可得 G 含 39 阶元,与 $\pi_{p_m}(M)=\{13\}$ 矛盾。故 G 不是 Frobenius 群。

G 也不是 2-Frobenius 群,否则 $t(G)=2$ 且 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,使 $\pi(K/H)=\pi_2(G)$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^4\times3^3$,故 $13\in\pi_2(G)$,从而 K 中含 13 阶元。将 K 的 13 阶元作用于 H 的 Sylow 2-子群或者 H 的 Sylow 3-子群就可得到矛盾。故 G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 的结构如引理 1(2),即 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,使 $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$,$H$ 是幂零群,G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群,K/H 是非交换单群。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^4\times3^3$,$t(G)\geqslant2$,从而 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3\}$,$13\in\pi(K/H)$。若 H 非平凡,不妨设 $H=S_2\times S_3$,$S_i\in Syl_i(H)$,$i=2,3$,由于 H 是幂零群,故 $S_i\trianglelefteq K$,$i=2,3$。将 K 的 13 阶元作用于 S_i 就可得 $\pi_{p_m}(M)\neq\{13\}$,矛盾,于是有 $H=1$。

这样 G 有正规非交换单子群 K,使 $\pi(G/K)\in\pi_1(G)=\{2,3\}$,$13\in\pi(K)$。如果 $\pi(K)=3$,即 K 为单 K_3-群,由文献[16]可知 K 只能是 $L_3(3)$。

如果 $|\pi(K)|\geqslant4$,则由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^4\times3^3$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{13\}$,故 $t(K)\geqslant2$,由文献[2]并利用条件 $\pi_{p_m}(M)=\{13\}$ 即可得 K 只可能是下列群之一:$L_2(13)$,$S_z(8)$,$L_4(3)$,$G_2(3)$,${}^3D_4(2)$,${}^2F_4(2)'$以及 F_{22}。

如果 $K\cong L_2(13)$,则 $|K|=(2^2\times3\times7\times13)$,由于 $m_1(G)=2^4\times3^3$,$m_1(K)=2^2\times3$,固有 $2^2\times3^2\mid|(G/K)|\mid|\mathrm{Out}(L_2(13))|=2$,矛盾,从而 $K\ncong L_2(13)$。

如果 $K\cong S_z(8)$,则 $|K|=(2^6\times5\times7\times13)$。由于此时 $m_1(K)=2^6$,这显然与 $m_1(G)=2^4\times3^3$ 矛盾,从而 $K\ncong S_z(8)$。同理 $K\ncong L_4(3)$,$G_2(3)$,${}^3D_4(2)$,${}^2F_4(2)'$以及 F_{22}。

于是有 $K\cong L_3(3)$,从而 $1\trianglelefteq L_3(3)\trianglelefteq G$,此时显然有 $C_G(L_3(3))=1$,又 $\mathrm{Out}(L_3(3))=2$,于是就有 $G\cong L_3(3)$ 或者 $G\cong\mathrm{Aut}(L_3(3))$。如果 $G\cong\mathrm{Aut}(L_3(3))$,那么显然 $m_1(G)>m_1(L_3(3))=m_1(M)$,与假设矛盾,于是 $G\cong L_3(3)$。

情形 3 $M\cong U_3(3)(2^5\times3^3\times7)$。

此时 $m_1(G)=m_1(M)=2^5\times3^3$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{7\}$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^5\times3^3$,故 $t(G)\geqslant2$,故由引理 1 可知 G 的结构如下:

(1) G 是 Frobenius 群或 2-Frobenius 群;

(2) G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,且 H 是幂零 $\pi_1(G)$-群,G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群,K/H 是非交换单群。

但 G 不可能是 Frobenius 群。否则 $G=HK$,其中 H 是 Frobenius 核,K 是 Frobenius 补,$T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

若 $2\in\pi(H)$,则 $\pi(H)=\pi_1(G)$。因 H 为幂零群,故 $H=S_2\times S_3$,$S_i\in\mathrm{Syl}_i(H)$,$i=2,3$,且 $S_i\trianglelefteq G$,从而有 $|K|\mid|\mathrm{Aut}(S_3)|$。但由于 $7\mid|K|$,而 $|\mathrm{Aut}(S_3)|\mid|(3^3-1)(3^3-3)(3^3-9)|$,矛盾。

若 $2\in\pi(K)$,则由条件 G 的 Sylow 7-子群 S_7 正规于 G 且其阶 7。将 G 的 Sylow 3-子群作用于 S_7 便可得 G 含 21 阶元,与 $\pi_{p_m}(M)=\{7\}$ 矛盾。故 G 不是 Frobenius 群。

G 也不是 2-Frobenius 群,否则 $t(G)=2$ 且 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,使得 $\pi(K/H)=\pi_2(G)$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1(G)$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^5\times3^3$,故 $7\in\pi_2(G)$,从而 K 中含 7 阶元。如果 $\pi(H)=\{2\}$,既然 $\pi(K/H)=\pi_2(G)$,故 $3\notin\pi(K/H)=\pi_2(G)$,于是就有 $3^3\mid|G/K|\mid|\mathrm{Aut}(K/H)|=6$,矛盾。如果 $\pi(H)=\{2,3\}$,将 K 的 7 阶元作用于 H 的 Sylow 3-子群就可得到矛盾。故 G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 的结构如引理 1(2),即 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$,使 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\pi_1(G)$,$H$ 是幂零群,G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群,K/H 是非交换单群。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^5\times3^3$,$t(G)\geqslant2$,从而 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3\}$,$7\in\pi(K/H)$。假设 H 非平凡,且 $\pi(H)=\{2\}$。由于 K/H 是非交换单群,固有 $3\in\pi(K)$ 或者 $5\in\pi(K)$ 并且 $|H|\leqslant2^3$。如果 $5\in\pi(K)$,则将 K 的 5 阶元作用于 H 可得 $5\mid(2^3-1)(2^3-2)(2^3-4)$,矛盾。固此时 $5\notin\pi(K)$,从而必有 $3\in\pi(K)$,即此时 K/H 是单 K_3-群。由文献[16]可知 K/H 只可能是 $L_2(7)$,$L_2(8)$ 和 $U_3(3)$ 3 种群之一。如果 $K/H\cong L_2(7)$,则 $|K/H|=2^3\times3\times7$,从而 $|H|\leqslant2^2$,将 K 的 7 阶元作用于 H 就可得 $\pi_{p_m}(M)\neq\{7\}$,矛盾,从而 $K/H\ncong L_2(7)$,同理可证,$K/H\ncong L_2(8)$ 和 $U_3(3)$。且 $\pi(H)=\{2,3\}$。由于 H 为幂零群,故 $S_3\trianglelefteq K$,$S_3\in\mathrm{Syl}_3(H)$。将 K 的 7 阶元作用于 S_3 就可得 $\pi_{p_m}(M)\neq\{7\}$,矛盾,于是有 $H=1$。

这样 G 有正规非交换单子群 K,使 $\pi(G/K)\subseteq\pi_1(G)=\{2,3\}$,$7\in\pi(K)$。如果 $|\pi(K)|=3$,即 K 为单 K_3-群,由[7]可知 K 只能是下列群之一:$L_2(7)$,$L_2(8)$以及 $U_3(3)$。

如果 $|\pi(K)|\geqslant4$,则由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^5\times3^3$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{7\}$,故 $t(K)\geqslant2$,由文献[2]并利用条件 $\pi_{p_m}(M)=\{7\}$ 即可得 K 只可能是群下列群之一:A_7,A_8,A_9,J_2,$L_3(4)$,$U_3(5)$,$S_6(2)$,$O_8^+(2)$以及 $U_4(3)$。

如果 $K\cong L_2(7)$,则 $|K|=(2^3\times3\times7)$,由于 $m_1(G)=2^5\times3^3$,$m_1(K)=2^3$,故有 $2^2\times3^3\mid|(G/K)|\mid|\mathrm{Out}(L_2(7))|=2$,矛盾,从而 $K\ncong L_2(7)$。同理 $K\ncong L_2(8)$ 和 A_7。

如果 $K\cong A_8$,则 $|K|=(2^6\times3^2\times5\times7)$,由于此时

$m_1(G)=2^5\times3^3$，这显然与 $m_1(K)=2^6\times3^2\times5$ 矛盾，从而 $K\ncong S_6(2)$。同理 $K\ncong A_9,J_2,L_3(4),U_3(5),S_6(2)$，$O_8^+(2)$ 以及 $U_4(3)$。

于是有 $K\cong U_3(3)$，从而 $1\trianglelefteq U_3(3)\trianglelefteq G$，此时显然有 $C_G(U_3(3))=1$，又 $\mathrm{Out}(U_3(3))=2$，于是就有 $G\cong U_3(3)$ 或者 $G\cong \mathrm{Aut}(U_3(3))$。如果 $G\cong \mathrm{Aut}(U_3(3))$，那么显然 $m_1(G)>m_1(U_3(3))=m_1(M)$，与假设矛盾，于是 $G\cong U_3(3)$。

情形 4　$M\cong L_2(17)(2^4\times3^2\times17)$。

此时 $m_1(G)=m_1(M)=2^4$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{17\}$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^4$，故 $t(G)\geqslant2$，故由引理 1 可知 G 的结构如下：

（1）G 是 Frobenius 群或 2-Frobenius 群；

（2）G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，且 H 是幂零 $\pi_1(G)$-群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群。

首先，利用与情形 1 类似的方法可以证明 G 既不可能是 Frobenius 群，也不可能是 2-Frobenius 群。

于是 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\pi_1(G)$，$H$ 是幂零群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^4$，$t(G)\geqslant2$，从而 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2\}$，$17\in\pi(K/H)$。与情形 1 类似的可以证明 $H=1$，从而 G 有正规非交换单子群 K，使 $\pi(G/K)\subseteq\pi_1(G)=\{2\}$，$17\in\pi(K)$。如果 $|\pi(K)|=3$，即 K 为单 K_3-群，由文献[16]可知 K 只能是 $L_2(17)$。则由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^4$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{17\}$，故 $t(K)\geqslant2$，由文献[2]并利用条件 $\pi_{p_m}(M)=\{17\}$ 即可得 K 只可能是 $S_4(4)$ 和 H_e。

如果 $K\cong S_4(4)$，则 $|K|=(2^8\times3^2\times5^2\times17)$，由于此时 $m_1(K)=2^8\times3^2\times5^2$，这显然与 $m_1(G)=2^4$ 矛盾，从而 $K\ncong S_4(4)$。同理 $K\ncong H_e$。

于是有 $K\cong L_2(17)$，从而 $1\trianglelefteq L_2(17)\trianglelefteq G$，此时显然有 $C_G(L_2(17))=1$，又 $\mathrm{Out}(L_2(17))=2$，于是就有 $G\cong L_2(17)$ 或者 $G\cong\mathrm{Aut}(L_2(17))$。如果 $G\cong\mathrm{Aut}(L_2(17))$，那么显然 $m_1(G)>m_1(L_2(17))=m_1(M)$，与假设矛盾，于是 $G\cong L_2(17)$。

对于单群 A_5，有以下结论：

定理 2　设 G 是有限非可解群，M 是单 K_3-群 A_5，则 $G\cong M$ 当且仅当：

（1）$m_1(G)=m_1(M)$；

（2）$\pi_{p_m}(G)=\pi_{p_m}(M)$。

证明　因定理的必要性是显然的，只需证明充分性即可。

依假设 $m_1(G)=m_1(M)=2^2$ 且 $\pi_{p_m}(M)=\{5\}$。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^2$，故 $t(G)\geqslant2$，从而由引理 1 可知 G 的结构如下：

（1）G 是 Frobenius 群或 2-Frobenius 群；

（2）G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，且 H 是幂零 $\pi_1(G)$-群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群。

但 G 不可能是 Frobenius 群。否则 $G=HK$，其中 H 是 Frobenius 核，K 是 Frobenius 补，$T(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

若 $2\in\pi(H)$，则 G 必为可解群，不可。

若 $2\in\pi(K)$，则由条件 K 不可解且含与 $SL_2(5)$ 同构的子群。因 $5^2\mid|SL_2(5)|$，故 $25\in\pi_{p_m}(K)$ 与假设 $\pi_{p_m}(G)=\{5\}$ 矛盾，G 不是 Frobenius 群。由于 G 非可解，故 G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 有正规列 $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$，使 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\pi_1(G)$，$H$ 是幂零群，G/K 是可解 $\pi_1(G)$-群，K/H 是非交换单群。由于 $m_1(G)=m_1(M)=2^2$，故 $t(G)\geqslant2$，从而 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2\}$，$5\in\pi(K/H)$。若 H 非平凡，$|H|=2^k$，$1<k\leqslant2$。将 K 的 5 阶元作用于 H 就可得 $\pi_{p_m}(M)\neq\{5\}$，矛盾，于是有 $H=1$。从而 G 有正规非交换单子群使 $\pi(G/K)\subseteq\pi_1(G)=\{2\}$，$5\in\pi(K)$。由于 $\pi_{p_m}(G)=\{5\}$ 且 K 为非交换单群，故 $|\pi(K)|=3$，即 K 为单 K_3-群，由文献[16]可知 K 只能是下列群之一：A_5，A_6 以及 $U_4(2)$。$m_1(K)=2^2\times3^2$ 如果 $K\cong A_6$，则 $|K|=(2^2\times3^2\times5)$，由于此时 $m_1(K)=2^2\times3^2$，这显然与 $m_1(G)=2^2\times3$ 矛盾，从而 $K\ncong A_6$。同理 $K\ncong U_4(2)$。

于是有 $K\cong A_5$，从而 $1\trianglelefteq A_5\trianglelefteq G$，此时显然有 $C_G(A_5)=1$，又 $\mathrm{Out}(A_5)=2$，于是就有 $G\cong A_5$ 或者 $G\cong\mathrm{Aut}(A_5)$。如果 $G\cong\mathrm{Aut}(A_5)$，那么显然 $m_1(G)>m_1(A_5)=m_1(M)$，与假设矛盾，于是 $G\cong A_5$。

注 2　以上定理中假设 G 是有限非可解群的条件是必不可少的。例如 $G=\langle a\rangle\rtimes\langle\alpha\rangle$，这里 $\langle a\rangle$ 是由 a 生成的 5 阶循环群，$\alpha\in\mathrm{Aut}\langle a\rangle$ 且 $\alpha(a)=a^2$。显然有 $m_1(G)=m_1(A_5)=2^2$，且 $\pi_{p_m}(G)=\pi_{p_m}(A_5)=\{5\}$，但 $G\ncong A_5$。

参考文献：

［1］ Williams J S. Prime graph components of finite simple groups［J］. Journal of Alge-bra, 1981, 69(11):487-513.

［2］ Chen G Y. A New Characterization of Sporadic Simple Groups［J］. Algebra Collo-quium, 1996, 3(1):49-58.

［3］ Chen G Y. A new characterization of Suzuki-Ree groups［J］. Science in China (ser A), 1997, 27

(5):430-433.

[4] Chen G Y. A new characterization of $PSL_2(q)$[J]. Southeast Asian Bulletin of Math-ematics, 1998, 22:257-263.

[5] Chen G Y. Characterization of $^3D_4(q)$[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2001, 25:389-401.

[6] Iranmanesh A, Alavi S H. A characterization of simple groups $PSL(5, q)$[J]. Bulletin of Austral Mathematic Society, 2002, 65:211-222.

[7] Iranmanesh A, Alavi S H, Khosravi B. A characterization of $PSL(3, q)$. where q is an odd prime power[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2002, 170(213):243-254.

[8] Iranmanesh A, Alavi S H, Khosravi B. A characterization of $PSL(3, q)$ for $q = 2^n$[J]. Acta Math. Sinica(English series), 2002, 18(3):463-472.

[9] Khosravi A, Khosravi B. A new characterization of $PSL(p, q)$[J]. Communications in Algebra, 2004, 32(6):2325-2339.

[10] Khosravi A, Behrooz Khosravi. Characterizability of $PSU(p+1, q)$ by its order component(s)[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2006, 36(5):1555-1577.

[11] Khosravi B, Bahman Khosravi. A characterization of $E_6(q)$[J]. Algebras Groups and Geometries, 2002, 19(2):225-243.

[12] Khosravi B, Bahman Khosravi. A characterization of $^2E_6(q)$[J]. Kumamoto Jour-nal of Mathematics, 2003, 16:1-11.

[13] Shi H, Han Z, Chen G. $D_p(3)$ $(p \geqslant 5)$ can be characterized by its order components[J]. Colloquium Mathematicum, 2012, 126(2):257-268.

[14] Groenstein D. Finite simple groups[M]. New York: Plenum Press, 1968.

[15] 陈贵云. Frobenius 群和 2-Frobenius 群的结构[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1995, 20(5):485-487.

[16] Herzog M. On finite simplie groups of order divisible by three primes only[J]. Journal of Algebra, 1968, 10:383-388.

A Characterization of Some K_3-Simple Groups

LAN Lin[1], HAN Zhangjia[1], SHI Huaguo[2]

(1. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China; 2. Faculy of Teacher Education of Sichuan Vocational and Technical College, Suining 629000, China)

Abstract: Let G be a finite group, $\pi(G)$ denotes the set of prime divisors of $|G|$, p_m is the largest element of $\pi(G)$, and $\pi_{p_m}(G)$ denotes the set of orders of centernizer of elements of order p_m in G. In this paper, we give a characterization property for some K_3 simple groups by its even order component and the set $\pi_{p_m}(G)$.

Keywords: finite groups; even order component; centernizer of elements